

El problema de tomografía local utilizando wavelets

Wilmar Alberto Díaz Ossa
Harold Vacca González

UNIVERSIDAD EAFIT
DEPARTAMENTO DE CIENCIAS BÁSICAS
MAESTRÍA EN MATEMÁTICAS APLICADAS
MEDELLÍN
2012

El problema de tomografía local utilizando wavelets

Wilmar Alberto Díaz Ossa
Harold Vacca González

Trabajo de investigación presentado como requisito parcial para optar el
título de Magíster en Matemáticas Aplicadas

Director
Jairo Villegas G

UNIVERSIDAD EAFIT
DEPARTAMENTO DE CIENCIAS BÁSICAS
MAESTRÍA EN MATEMÁTICAS APLICADAS
MEDELLÍN
2012

A mi hija Laura y a Carito.
Wilmar D.

A mi familia personal y profesional.
Harold V.

Índice general

Introducción	1
1. Preliminares	3
1.1. Introducción	3
1.2. Transformada de Fourier	5
1.2.1. Serie de Fourier	7
1.3. Distribuciones y espacios de Sobolev	8
1.3.1. Espacios de Sobolev	11
1.4. Transformada de Hilbert	13
1.4.1. Propiedades de la transformada de Hilbert	14
1.4.2. La transformada de hilbert 2D	15
1.5. Transformada de rayos X y de Radon	15
1.5.1. Transformada continua de Radon	15
1.5.2. La Transformada continua de Radon en \mathbb{R}^n	18
1.5.3. Propiedades básicas de la Transformada continua de Radon	20
1.5.4. Operador Retroproyección	23
1.5.5. Fórmula de retroproyección filtrada	23
2. Introducción a las wavelets	25
2.1. Introducción	25
2.2. Transformadas wavelets	26

2.2.1.	Transformada wavelet continua	26
2.2.2.	Transformada wavelet discreta	30
2.2.3.	Transformada wavelet semicontinua	33
2.2.4.	Transformada Rápida Wavelet	34
2.3.	Análisis Multiresolución	34
2.3.1.	Base Ortonormal de wavelets $\psi_{j,k}$ y la Proyección Ortogonal P_j sobre V_j	38
2.3.2.	Propiedades de φ y W_0	40
2.3.3.	Wavelets biortogonales	42
2.3.4.	Los B-Splines	44
3.	Wavelet y Tomografía Local	53
3.1.	La tomografía computarizada	53
3.1.1.	La tomografía local	55
3.1.2.	Las imágenes digitales	56
3.2.	Inversión de Radon utilizando wavelets	61
4.	Implementación del algoritmo	69
4.1.	Análisis del error	69
4.2.	El algoritmo	73
4.3.	Resultados	75
	Bibliografía	79

Introducción

La Tomografía local, llamada también tomografía interior, está dentro de los denominados problemas inversos. Este consiste en recuperar los valores de una imagen (función), en alguna región de interés, conociendo las proyecciones de rectas que atraviesan una región de estudio en la imagen (función).

Debido a que la teoría de Wavelets es una alternativa que permite representar una señal en un espacio de tiempo-frecuencia, facilita el procesamiento local de señales no estacionarias. Lo anterior, es propicio en este proyecto, ya que, además de poder descomponer los datos de una imagen en coeficientes de altas y bajas frecuencias para su análisis; la transformada Wavelet de f puede ser recuperada localmente desde proyecciones locales.

En este trabajo, se estudian y se aplican las transformadas que intervienen en el problema interior de tomografía local. Se describe y aplica el denominado Análisis Multirresolución y se utilizan bases de wavelets biortogonales para la localización y solución de dicho problema.

La implementación de la solución al problema, se evidencia ejecutando el algoritmo que se ha denominado reconstructor ITRW-BSC - Inversión de la Transformada de Radon basado en Wavelets B-Spline Cúbicos -, desarrollado bajo el software MatLab®. Para facilitar su ejecución, se ha implementado una interfaz gráfica que amigablemente simula, para una

2 Introducción

región central de la imagen del Shepp-Logan phantom, los procesos que intervienen en su reconstrucción.

El éxito del algoritmo propuesto, radica en que la base formada a partir de wavelets B-spline cúbicos de soporte compacto, tiene suficientes momentos de desvanecimiento para que la función de escalado filtrada, como la wavelet madre y su transformada de Hilbert, tengan decaimiento rápido. En consecuencia, se favorece la localización de la transformada wavelet de la transformada de Radon y, por tanto, la inversión, es decir, la reconstrucción de la región de interés.

El trabajo está organizado de la siguiente manera: en el capítulo 1 se describen las transformadas de Fourier, de Hilbert y de Radon, enunciando las principales propiedades de estas y su relación con la tomografía local. En el capítulo 2 se hace una breve introducción al análisis wavelets que incluye el análisis multiresolución para determinar las wavelets escaladas y las wavelets madre y su utilización en el tratamiento de imágenes digitales. El capítulo 3 es el corazón de este trabajo, ya que se trata el problema de tomografía local como un problema inverso, se utiliza el teorema *slice* de Fourier para la recuperación de la función y se utilizan wavelets biortogonales como otra alternativa para recuperar la transformada inversa de Radon. En el capítulo 4, se hace una introducción al análisis del error en la reconstrucción, para luego centrarse en las consideraciones prácticas de la implementación del algoritmo rector ITRW-BSC - inversión de la transformada de Radon basado en Wavelets B-Spline Cúbicos - versión α , desarrollado sobre MatLab®. Finalmente se muestran gráficamente los resultados obtenidos al comparar la región central del Shepp-Logan reconstruida al utilizar wavelets biortogonales, frente a la reconstrucción realizada utilizando transformada rápida de Fourier.

Resaltamos que el trabajo está basado en el artículo referenciado en [3].

Queremos expresar nuestros agradecimientos al profesor Jairo Villegas por sus aportes y orientaciones en la realización del presente trabajo. Su ayuda resultó invaluable.

CAPÍTULO 1

Preliminares

1.1. Introducción

En este capítulo se presenta un resumen de resultados básicos del análisis de Fourier omitiendo sus pruebas, las cuales se pueden encontrar en algunos de los siguientes textos [5], [8], [13], [33], [46], [60], [68], [71], [75], [79].

Se recuerda que $L_1(\mathbb{R})$ es el espacio de todas las funciones $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, tal que $\int_{\mathbb{R}} |f(t)| dt = \|f\|_{L_1} < \infty$. De igual forma se tiene para $L_2(\mathbb{R})$, el espacio las funciones cuadrado-integrables, la norma:

$$\|f\|_{L_2} = \left(\int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 dt \right)^{1/2} < \infty.$$

Este espacio dotado con el producto escalar:

$$\langle f, g \rangle_{L_2} = \int_{\mathbb{R}} f(t) \overline{g(t)} dt,$$

donde $\overline{g(t)}$ denota el conjugado complejo de $g(t)$. Con este producto interno el espacio $L_2(\mathbb{R})$ es de Hilbert. Las funciones $f, g \in L_2(\mathbb{R})$ son ortogonales si $\langle f, g \rangle_{L_2} = 0$. En general, $L_p(\mathbb{R})$ ($p \geq 1$), es el espacio de todas las funciones

4 Preliminares

(clases de equivalencia) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, tal que $\int_{\mathbb{R}} |f(t)|^p dt = \|f\|_{L_p}^p < \infty$, donde:

$$\|f\|_{L_p} = \left(\int_{\mathbb{R}} |f(t)|^p dt \right)^{1/p}$$

es la norma de f en $L_p(\mathbb{R})$. Otro espacio que se utilizará es $\ell_2(\mathbb{Z})$, el de las sucesiones (x_j) , $j \in \mathbb{Z}$, tal que $\sum_j |x_j|^2 < \infty$.

Sea $F = \mathbb{C}$ o \mathbb{R} , X y Y espacios normados (espacios vectoriales equipados con una norma). Un operador lineal es una función $T : X \rightarrow Y$ tal que $T(au + bv) = aT(u) + bT(v)$, para cada $a, b \in F$ y cada $u, v \in X$. El operador T es continuo en u_0 si para cada $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si:

$$\|u - u_0\|_X < \delta \quad \text{entonces} \quad \|Tu - Tu_0\|_Y < \epsilon. \quad (1.1.1)$$

Si (1.1.1) se cumple para cada $u_0 \in X$ se dice que T es continuo en X . Si δ no depende del punto u_0 se dice que T es uniformemente continuo en X .

El operador T es acotado si y sólo si existe una constante $c > 0$ tal que $\|Tu\|_Y \leq c\|u\|_X$ para cada $u \in X$.

Si $f, g \in L_1(\mathbb{R})$, entonces la convolución de f y g , denotada $f * g$, se define por:

$$(f * g)(t) = \int_{\mathbb{R}} f(t - z)g(z)dz.$$

Un sistema de funciones $\{\phi_j, j \in \mathbb{Z}\}$, $\phi_j \in L_2(\mathbb{R})$, se llama ortonormal si:

$$\int_{\mathbb{R}} \phi_j(t) \overline{\phi_k(t)} dt = \delta_{jk},$$

donde δ_{jk} es la delta de Kronecker. Es decir,

$$\delta_{jk} = \begin{cases} 1, & \text{si } j = k; \\ 0, & \text{si } j \neq k. \end{cases}$$

Un sistema ortonormal se llama una base en un subespacio V de $L_2(\mathbb{R})$ si cualquier función $f \in V$ tiene una representación de la forma:

$$f(t) = \sum_j c_j \phi_j(t),$$

donde los coeficientes c_j satisfacen $\sum_j |c_j|^2 < \infty$. En lo que sigue se utilizará la notación $\sum_j = \sum_{j=-\infty}^{\infty}$, $\int_{\mathbb{R}} = \int_{-\infty}^{\infty}$, $\|f\|_{L_2} = \|f\|_2$ y \langle, \rangle_2 .

La función característica del conjunto A , χ_A , se define por:

$$\chi_A(t) = \begin{cases} 1, & t \in A; \\ 0, & t \notin A. \end{cases}$$

También se utilizará la notación $I\{A\}$ para denotar esta función y la llaman función indicadora.

El soporte de una función $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, denotado $\text{sop} f$, se define por: $\text{sop} f = \overline{\{x \in A : f(x) \neq 0\}}$.

1.2. Transformada de Fourier

En esta sección se recordará la definición y algunas propiedades importantes de la transformada de Fourier.

Definición 1.2.1. Sea $f \in L_1(\mathbb{R})$ y $\omega \in \mathbb{R}$. La transformada de Fourier de f en ω se define por:

$$\hat{f}(\omega) := \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-i\omega t} dt.$$

Como:

$$\int_{\mathbb{R}} |f(t)| |e^{-i\omega t}| dt = \int_{\mathbb{R}} |f(t)| dt = \|f\|_{L_1} < \infty$$

se tiene que la transformada de Fourier está bien definida. La aplicación $f \mapsto \hat{f}$ se llama transformación de Fourier y se denota por \mathcal{F} ($\mathcal{F}(f) = \hat{f}$). La función \hat{f} es continua y tiende a cero cuando $|\omega| \rightarrow \infty$ (Lema de Riemann-Lebesgue). Es claro que $\mathcal{F}(af + bg) = a\mathcal{F}(f) + b\mathcal{F}(g)$, para cada $a, b \in \mathbb{R}$.

En general \hat{f} no es una función integrable, por ejemplo, sea:

$$f(t) = \begin{cases} 1, & |t| < 1; \\ 0, & |t| > 1. \end{cases}$$

6 Preliminares

Entonces:

$$\begin{aligned}\hat{f}(\omega) &= \int_{-1}^1 e^{-it\omega} dt = \left[\frac{e^{-i\omega} - e^{i\omega}}{-i\omega} \right] \\ &= \frac{2 \operatorname{sen} \omega}{\omega} \notin L_1(\mathbb{R}).\end{aligned}$$

Si $\hat{f}(\omega)$ es integrable, entonces existe una versión continua de f y se puede obtener la fórmula de inversión de Fourier:

$$f(t) = \mathcal{F}^{-1}(\hat{f}(\omega)) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega. \quad (1.2.1)$$

La siguiente proposición recoge algunas propiedades fundamentales de la transformada de Fourier.

Proposición 1.2.2. Sean $f, g \in L_1(\mathbb{R})$, entonces:

1. $\widehat{(\tau_x f)}(\omega) = e^{-i\omega x} \hat{f}(\omega)$, donde $(\tau_a f)(t) = f(t - a)$.
2. $(\tau_x \hat{f})(\omega) = \widehat{(e^{ix(\cdot)} f)}(\omega)$
3. $\widehat{f * g} = \hat{f} \hat{g}$
4. Si $\epsilon > 0$ y $g_\epsilon(t) = g(\epsilon t)$ entonces: $\hat{g}_\epsilon(\omega) = \epsilon^{-1} \hat{g}(\omega/\epsilon)$.

Otro resultado útil es el siguiente: Si $f, g \in L_1(\mathbb{R}) \cap L_2(\mathbb{R})$, entonces:

$$\|f\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega \quad (\text{fórmula de Plancherel}) \quad (1.2.2)$$

$$\langle f, g \rangle_2 = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\omega) \overline{\hat{g}(\omega)} d\omega \quad (\text{fórmula de Parseval}). \quad (1.2.3)$$

Por extensión, la transformada de Fourier se puede definir para cualquier $f \in L_2(\mathbb{R})$. En virtud a que el espacio $L_1(\mathbb{R}) \cap L_2(\mathbb{R})$ es denso en $L_2(\mathbb{R})$. Luego, por isometría (excepto por el factor $1/2\pi$) se define \hat{f} para cualquier $f \in L_2(\mathbb{R})$, y las fórmulas (1.2.2) y (1.2.3) permanecen válidas para todo $f, g \in L_2(\mathbb{R})$.

En teoría de señales, la cantidad $\|f\|_2$ mide la energía de la señal, mientras que $\|\hat{f}\|_2$ representa el espectro de potencia de f .

Si f es tal que $\int_{\mathbb{R}} |t|^k |f(t)| dt < \infty$, para algún entero $k \geq 1$, entonces:

$$\frac{d^k}{d\omega^k} \hat{f}(\omega) = \int_{\mathbb{R}} (-it)^k e^{-i\omega t} f(t) dt. \quad (1.2.4)$$

Recíprocamente, si $\int_{\mathbb{R}} |\omega|^k |\hat{f}(\omega)| d\omega < \infty$, entonces

$$\mathcal{F}(f^{(k)})(\omega) = (i\omega)^k \hat{f}(\omega). \quad (1.2.5)$$

1.2.1. Serie de Fourier

Sea f una función 2π -periódica en \mathbb{R} . Se escribirá $f \in L_p(0, 2\pi)$ si

$$f(t)\chi_{[0, 2\pi]}(t) \in L_p(0, 2\pi), \quad p \geq 1$$

cualquier función f , 2π -periódica en \mathbb{R} , tal que $f \in L_2(0, 2\pi)$, se puede representar por una serie de Fourier convergente en $L_2(0, 2\pi)$:

$$f(t) = \sum_n c_n e^{int},$$

donde los coeficientes de Fourier son dados por:

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} dt.$$

Se puede verificar que si $f \in L_1(\mathbb{R})$, entonces la serie, fórmula de sumación de Poisson,

$$S(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(t + 2k\pi) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n) e^{int} \quad (1.2.6)$$

converge casi para todo t y pertenece a $L_1(0, 2\pi)$. Además, los coeficientes de Fourier de $S(t)$ están dados por

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \hat{f}(k) = \mathcal{F}^{-1}(f)(-k).$$

En efecto, para ver la expresión (1.2.6), basta probar que

$$\int_0^{2\pi} \sum_k |f(t + 2k\pi)| dt < \infty.$$

8 Preliminares

Para la segunda parte se calculan los coeficientes de Fourier de $S(t)$, que son los valores de la transformada de Fourier de f en los enteros. Esto es, sea

$$h(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(t + 2k\pi),$$

entonces h es 2π -periódica y además, sus coeficientes de Fourier son

$$\begin{aligned}\hat{h}_n &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(t) e^{-int} dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(t + 2k\pi) \right] e^{-int} dt \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t + 2k\pi) e^{-int} dt \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi k}^{2\pi(k+1)} f(z) e^{-in(z-2k\pi)} dz \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(z) e^{-inz} dz = \frac{1}{2\pi} \hat{f}(n).\end{aligned}$$

Como consecuencia de la fórmula de sumación de Poisson tenemos

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega + 2k\pi) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) e^{-in\omega} \quad (1.2.7)$$

donde f es una función tal que $\hat{f} \in L_1(\mathbb{R})$, continua, y $\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)$ converge absolutamente.

1.3. Distribuciones y espacios de Sobolev

En esta sección se recogen algunos resultados básicos sobre distribuciones. La teoría de distribuciones libera al cálculo diferencial de ciertas dificultades que provienen del hecho de que existen funciones no diferenciables. Este hecho extiende el cálculo a una clase de objetos llamados distribuciones o funciones generalizadas, que es mucho mayor que la clase de funciones diferenciables.

Sea Ω un abierto de \mathbb{R}^n ,

$$\mathcal{D}(\Omega) = C_0^\infty(\Omega) = \{\varphi \in C^\infty(\Omega) : \text{sop } \varphi \text{ es un compacto contenido en } \Omega\}.$$

$\mathcal{D}(\Omega)$ denota el espacio vectorial de las funciones de prueba.

Si K es un compacto de Ω entonces:

$$\mathcal{D}_K(\Omega) = \{\varphi \in C^\infty(\Omega) : \text{sop } \varphi \subset K\}.$$

Una función típica de $\mathcal{D}(\Omega)$ es:

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } |x| \geq 1 \\ c \exp(\frac{1}{|x|^2-1}) & \text{si } |x| < 1, \end{cases}$$

donde $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ y $|x| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$, la constante c se escoge de tal forma que $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) dx = 1$; $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ y su soporte es la bola unitaria en \mathbb{R}^n , es decir, $\text{sop } \varphi = B_1(0)$.

Una expresión de la forma $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ con α_i un entero no negativo, para cada $i = 1, \dots, n$, se llama un multi-índice. Para el multi-índice α definimos el orden de α , denotado $|\alpha|$, por

$$|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n.$$

Si $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ y $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ es un multi-índice, entonces definimos

$$\partial^\alpha u := \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}, \quad x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}.$$

Sea $(\varphi_j)_{j=1}^\infty$ una sucesión de funciones en $\mathcal{D}(\Omega)$, $\varphi_j \rightarrow \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, cuando $j \rightarrow \infty$ si:

- a) existe un compacto $K \subset \Omega$ tal que para cada j $\text{sop } \varphi_j \subset K$
- b) $\partial^\alpha \varphi_j \rightarrow \partial^\alpha \varphi$ uniformemente en K , para cada multi-índice α .

La convergencia uniforme en K de la sucesión $(\partial^\alpha \varphi_j)_{j=1}^\infty$ significa que:

$$\sup_{x \in K} |(\partial^\alpha \varphi_j - \partial^\alpha \varphi)(x)| \rightarrow 0,$$

cuando $j \rightarrow \infty$. Una aplicación f es continua en $\mathcal{D}(\Omega)$ significa que para cada sucesión $(\varphi_j)_1^\infty$ con límite φ , se tiene $\langle f, \varphi_j \rangle \rightarrow \langle f, \varphi \rangle$, cuando $j \rightarrow \infty$.

10 Preliminares

Definición 1.3.1. Sea Ω un abierto de \mathbb{R}^n . La aplicación $T : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{C}$ es una distribución si:

a) T es lineal.

b) Para cada compacto $K \subset \Omega$ existe una constante $C_K > 0$ y un entero no negativo m (depende de K) tal que

$$|\langle T, \varphi \rangle| \leq C_K \sum_{|\alpha| \leq m} \sup_{x \in K} |\partial^\alpha \varphi(x)|,$$

para cada $\varphi \in \mathcal{D}_K(\Omega)$ y para cada multi-índice α .

En otras palabras, una distribución es un funcional lineal y continuo sobre $\mathcal{D}(\Omega)$. El espacio de todas las distribuciones sobre Ω se denota por $\mathcal{D}'(\Omega)$. Es decir, $\mathcal{D}'(\Omega) = \mathcal{L}(\mathcal{D}(\Omega), \mathbb{C})$ es el dual de $\mathcal{D}(\Omega)$.

Un ejemplo típico de distribución es la delta de Dirac, esto es, considerando el funcional lineal $\delta : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ definido por $\langle \delta, \varphi \rangle = \varphi(0)$, para cada $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. En efecto, si K es un compacto de \mathbb{R} y $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ entonces

$$|\langle \delta, \varphi \rangle| = |\varphi(0)| \leq \max_{x \in K} |\varphi(x)|,$$

acá $C_K = 1$ y $m = 0$.

Algunas propiedades importantes de las distribuciones tales como la multiplicación de una función por una distribución y la derivada generalizada se definen a continuación.

Multiplicación de una función $u \in C^\infty(\Omega)$ por una distribución T : Para cada $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ se define uT por

$$\langle uT, \varphi \rangle = \langle T, u\varphi \rangle,$$

uT está bien definida ya que si $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ y $u \in C^\infty(\Omega)$ entonces $u\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

Derivada de una distribución: Si α un multi-índice y $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ se define la derivada de T para cada $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ por:

$$\langle \partial^\alpha T, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, \partial^\alpha \varphi \rangle.$$

Con el propósito de extender la transformada de Fourier a las distribuciones, definamos las funciones de decaimiento rápido.

Definición 1.3.2. Sea $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. φ es una función de decrecimiento rápido si para cada α y β multi-índices, existe una constante positiva M tal que:

$$|x^\alpha \partial^\beta \varphi(x)| \leq M, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

El conjunto de todas las funciones de decrecimiento rápido forma un espacio vectorial real (o complejo) y lo denotamos por $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ y se llama espacio de Schwartz. Los elementos de este espacio se llaman *funciones de prueba de decrecimiento rápido*.

Una sucesión (φ_j) converge a 0 en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ si y sólo si $x^\alpha \partial^\beta \varphi_j(x) \rightarrow 0$ uniformemente en \mathbb{R}^n cuando $j \rightarrow \infty$.

El dual topológico $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) := \mathcal{L}(\mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \mathbb{C})$ se llama espacio de las distribuciones temperadas.

El funcional lineal $T : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{C}$ es continuo si para cada sucesión (φ_j) tal que $\varphi_j \rightarrow \varphi$ en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ se tiene $\langle T, \varphi_j \rangle \rightarrow \langle T, \varphi \rangle$ para cada $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

1.3.1. Espacios de Sobolev

En este apartado se introducen los espacios de Sobolev y algunas de sus propiedades más importantes. Si se quiere estudiar la regularidad de una función de soporte compacto o de una distribución es usual analizar el comportamiento de su transformada de Fourier en el infinito. Una forma alterna de hacer este análisis es midiendo la diferenciabilidad en términos de normas de L_2 , las razones son dos:

- i) L_2 es un espacio de Hilbert.
- ii) La transformada de Fourier, la cual convierte diferenciación en multiplicación por polinomios, es una isometría (isomorfismo que preserva normas).

Definición 1.3.3. Sea $m \geq 0$, $p \geq 1$ y Ω un dominio de \mathbb{R}^n ($n \geq 2$). El espacio de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ se define como:

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L_p(\Omega) : \partial^\alpha u \in L_p(\Omega), \quad \forall \alpha, \quad |\alpha| \leq m\}.$$

Es un espacio vectorial normado equipado con la norma de Sobolev:

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} \sum_{|\alpha| \leq m} |\partial^\alpha u|^p dx \right)^{1/p} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|\partial^\alpha u\|_{L_p(\Omega)}^p \right)^{1/p}.$$

12 Preliminares

Propiedades

1. $W^{m,p}(\Omega) = \widetilde{C^m(\Omega)}$ (completado) en la norma de Sobolev $\|\cdot\|_{W^{m,p}(\Omega)}$.
2. $(W^{m,p}(\Omega), \|\cdot\|_{W^{m,p}(\Omega)})$ es un espacio de Banach.
3. $\overline{C_0^m(\Omega)}^{W^{m,p}(\Omega)} = W_0^{m,p}(\Omega) = \{u \in W^{m,p}(\Omega) : \partial^\alpha u|_{\partial\Omega} = 0, |\alpha| \leq m-1\}$, $W_0^{m,p}(\Omega)$ es un subespacio de $W^{m,p}(\Omega)$ (acá $\partial^\alpha u|_{\partial\Omega}$ denota la extensión de $\partial^\alpha u$ a la frontera de Ω).
4. $(W_0^{m,p}(\Omega))' := W^{-m,q}(\Omega)$, donde $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, se llaman espacios de Sobolev negativos (si $p = 1$, $(W^{m,1}(\Omega))' = W^{-m,\infty}(\Omega)$).
5. Si $u \in W_0^{m,p}(\Omega)$ y $v \in W^{-m,q}(\Omega)$ es integrable, entonces:

$$\left| \int_{\Omega} uv dx \right| \leq \|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} \|v\|_{W^{-m,q}(\Omega)}, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

6. Si $m > k$ entonces:

$$W^{m,p}(\Omega) \subset W^{k,p}(\Omega) \quad \text{y} \quad \|\cdot\|_{W^{k,p}(\Omega)} \leq \|\cdot\|_{W^{m,p}(\Omega)},$$

en particular, $W^{0,p}(\Omega) = L_2(\Omega)$ y $\|\cdot\|_{W^{0,p}(\Omega)} = \|\cdot\|_p$.

Si $p = 2$, en lugar de $W^{m,2}(\Omega)$ escribiremos $H^m(\Omega)$, o sea,

$$H^m(\Omega) = \{u \in L_2(\Omega) : \partial^\alpha u \in L_2(\Omega), |\alpha| \leq m\},$$

$H^m(\Omega)$ es un espacio de Hilbert con el producto interno definido por:

$$\langle u, v \rangle_{H^m(\Omega)} = \int_{\Omega} \sum_{|\alpha| \leq m} \partial^\alpha u \partial^\alpha v dx,$$

$u, v \in H^m(\Omega)$. La norma en $H^m(\Omega)$ es:

$$\|u\|_{H^m(\Omega)} = \sqrt{\langle u, u \rangle_{H^m(\Omega)}} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|\partial^\alpha u\|_{L_2(\Omega)}^2 \right)^{1/2}.$$

Para $s \in \mathbb{R}$, el espacio de Sobolev $H^s(\mathbb{R})$ se define por:

$$H^s(\mathbb{R}) := \left\{ f \in L_2(\mathbb{R}) : \int_{\mathbb{R}} (1 + |x|^2)^s |\hat{f}(x)|^2 dx < \infty \right\},$$

donde \hat{f} es la transformada de Fourier de f . $H^s(\mathbb{R})$ equipado con el producto interno:

$$\langle f, g \rangle_{H^s} := \int_{\mathbb{R}} (1 + |x|^2)^s \hat{f}(x) \overline{\hat{g}(x)} dx$$

es un espacio de Hilbert. También se le asocia la norma:

$$\|f\|_{H^s} := \left(\int_{\mathbb{R}} (1 + |x|^2)^s |\hat{f}(x)|^2 dx \right)^{1/2}.$$

1.4. Transformada de Hilbert

Definición 1.4.1. *La transformada de Hilbert se define como*

$$\mathcal{H}f(t) = f_H(t) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{f(\tau)}{t - \tau} d\tau$$

Que es equivalente a una rotación de 90 grados en la fase de cada componente armónica de la señal. Claramente se puede ver que la transformada de Hilbert es un operador lineal. La transformada de Hilbert permite filtrar la señal mostrando las frecuencias que realmente interesan y eliminando el ruido de las frecuencias mayores de 250Hz. Realiza la transformación sobre la señal temporal devolviéndola filtrada también, en el dominio del tiempo.

La transformada es una integral impropia, puesto que para $t = s$ el integrando tiene una singularidad. Para evitar este problema se supone que se calcula la integral de forma simétrica en torno a $s = t$ según la siguiente ecuación:

$$f_H(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\tau)}{s - \tau} d\tau = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\int_{-\infty}^{t-\epsilon} \frac{f(\tau)}{s - \tau} d\tau + \int_{t+\epsilon}^{\infty} \frac{f(\tau)}{s - \tau} d\tau \right]$$

Se sigue de la definición (1.4.1) que la transformada de Hilbert es la convolución de $f(t)$ con $\frac{1}{\pi t}$, es decir,

$$f_H(t) = \frac{1}{\pi t} * f(t)$$

La transformada inversa de Hilbert esta dada por:

$$f(t) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{f_H(\tau)}{t - \tau} d\tau$$

Ejemplos

$$\mathcal{H}\left\{\frac{\sin t}{t}\right\} = \frac{1 - \cos t}{t}$$

$$\mathcal{H}\{\delta(t)\} = \frac{1}{\pi t}$$

$$\mathcal{H}\left\{\frac{1}{1+t^2}\right\} = \frac{t}{1+t^2}$$

$$\mathcal{H}\left\{\frac{1}{t}\right\} = -\pi\delta(t)$$

1.4.1. Propiedades de la transformada de Hilbert

1. La transformada de Hilbert de una constante es cero.
2. Las funciones f y $\mathcal{H}f$ son ortogonales.
3. $\mathcal{H}\{\mathcal{H}f(t)\} = -f(t)$.
4. Las normas de una función y su transformada de Hilbert son iguales, es decir,

$$\|f(t)\| = \|\mathcal{H}f(t)\|$$

Las demostraciones de las propiedades anteriores se pueden consultar [57].

La discretización de la transformada unidimensional de Hilbert viene dada por:

$$\mathcal{H}f(t) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t - n \Delta t) \frac{\sin^2(\pi n/2)}{n}, \quad n \neq 0$$

1.4.2. La transformada de hilbert 2D

El enfoque básico para la transformada de Hilbert 2D es simplemente extender el dominio de la convolución,

$$\mathcal{H}f(x, y) = \frac{1}{\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(u, v)}{(x - u)(y - v)} du dv = \frac{1}{\pi^2 xy} * f(x, y)$$

1.5. Transformada de rayos X y de Radon

Definición 1.5.1. *Considérese la esfera unidad S^{n-1} , y sea θ que pertenece a S^{n-1} y Θ^\perp el hiperplano que pasa a través del origen ortogonal a θ . Parametrizando la línea $l(\theta, y)$ en \mathbb{R}^n especificando su dirección $\theta \in S^{n-1}$ y el punto y donde la línea intersecta al hiperplano. La **transformada de rayos X** de una función $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$ está dada por*

$$Pf(\theta, y) = P_\theta f(y) = \int_{\mathbb{R}} f(y + t\theta) dt, \quad y \in \Theta^\perp$$

1.5.1. Transformada continua de Radon

La transformada de Radon de una función $f(x, y)$, denotado por $\mathfrak{R}f(\theta, s)$, se define como la integral de línea de f a lo largo de una línea L inclinada en un ángulo θ y a una distancia s desde el origen.

Formalmente:

$$\mathfrak{R}f(\theta, s) = \int_L f(x, y) du = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \delta(x \cos \theta + y \sin \theta - s) dx dy \quad (1.5.1)$$

donde $\delta(x)$ es la medida Delta de Dirac.

La transformada de Radon mapea puntos del plano xy del dominio de f , en puntos (θ, s) del plano θs . A cada punto (θ, s) le corresponde una línea del dominio (x, y) . Note que (θ, s) no es la coordenada polar de (x, y) .

Más específicamente tenemos:

$$\begin{aligned} \mathfrak{R} : C_0^\infty(\mathbb{R}^2) &\rightarrow C_0^\infty(\mathbb{R} \times S^1) \\ f &\rightarrow \mathfrak{R}f \end{aligned}$$

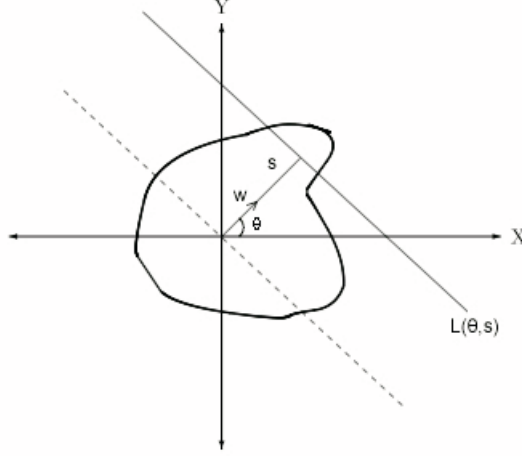


Figura 1.1: Transformada de Radon 2D

La Transformada de Radon en Coordenadas Polares

Si la imagen de la función $f(x, y)$ viene dada en forma polar como $g(r, \theta) = f_p(x, y)$, entonces:

$$\Re g(s, \theta) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} g(\sqrt{s^2 + u^2}, \theta + \arctan(u/s)) du, & \text{si } s \neq 0 \\ \int_{-\infty}^{\infty} g(u, \theta + \frac{\pi}{2}) du, & \text{si } s = 0 \end{cases}$$

Proposición 1.5.2. *Bajo las hipótesis de la definición 1.5.1:*

$$\widehat{P_\theta f}(\eta) = (2\pi)^{-1/2} \hat{f}(\eta), \quad \eta \in \Theta^\perp$$

$$\widehat{\Re_\theta f}(\sigma) = (2\pi)^{(n-1)/2} \hat{f}(\sigma\theta), \quad \sigma \in \mathbb{R}$$

donde \hat{f} es la transformada de Fourier.

Demostración. Sea $\eta \in \Theta^\perp$. Entonces,

$$\begin{aligned} P_\theta f(\eta) &= (2\pi)^{-(1/2)} \int_{\Theta^\perp} P f(\theta, x) e^{-i\langle x, \eta \rangle} dx \\ &= (2\pi)^{-(1/2)} \int_{\Theta^\perp} \int_{\mathbb{R}} f(x + s\theta) ds e^{-i\langle x, \eta \rangle} dx \\ &= (2\pi)^{-(1/2)} \int_{\mathbb{R}^n} f(y) e^{-i\langle y, \eta \rangle} dy = (2\pi)^{-(1/2)} \hat{f}(\eta) \end{aligned}$$

Ahora,

$$(\Re_\theta f)(\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}^1} e^{-i\sigma s} \Re_\theta f(s) ds$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}^1} e^{-i\sigma s} \int_{\theta^\perp} f(s\theta + y) dy ds$$

Haciendo $x = s\theta + y$ y $dx = dy ds$ se obtiene:

$$\widehat{(\mathfrak{R}_\theta f)}(\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}^1} e^{-i\sigma s} \int_{\theta^\perp} f(x) dx$$

y como $s = \theta \cdot x$, entonces:

$$\widehat{(\mathfrak{R}_\theta f)}(\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}^1} e^{-i\sigma(\theta \cdot x)} \int_{\theta^\perp} f(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix \cdot \sigma\theta} f(x) dx$$

luego:

$$\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n}} \widehat{(\mathfrak{R}_\theta f)}(\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix \cdot \sigma\theta} f(x) dx$$

$$\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n}} \widehat{(\mathfrak{R}_\theta f)}(\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} f(\sigma\theta)$$

$$\widehat{(\mathfrak{R}_\theta f)}(\sigma) = \frac{\sqrt{(2\pi)^n}}{\sqrt{2\pi}} f(\sigma\theta) = \sqrt{(2\pi)^{n-1}} \widehat{f}(\sigma\theta)$$

$$\widehat{(\mathfrak{R}_\theta f)}(\sigma) = (2\pi)^{(n-1)/2} \widehat{f}(\sigma\theta) \quad (1.5.2)$$

□

Las transformadas de rayos X y de Radon son casos especiales de la transformada general k - plano, la cual mapea las integrales de línea de una función sobre un subespacio k - dimensional afín, para un ejemplo ver [35].

Existe una relación fundamental entre la transformada de Radon y la transformada de Fourier de una función. Esta relación se conoce como el **teorema de Slice de Fourier**

Proposición 1.5.3. *Para el caso continuo la transformada de Fourier 1D con respecto a s de la proyección de $\mathfrak{R}f(\theta, s)$ es igual a la "rebanada" central, en ángulo θ , de la transformada 2D de la función $f(x, y)$. Esto es,*

$$\widehat{\mathfrak{R}f}(\theta, \xi) = \widehat{f}(\xi \cos \theta, \xi \sin \theta)$$

donde

$$\widehat{f}(\xi_1, \xi_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-i(x\xi_1 + y\xi_2)} dx dy$$

es la transformada de Fourier 2D de la función $f(x, y)$.

18 Preliminares

Demostración. Rotando el sistema de coordenadas xy obtenemos el sistema de coordenadas (s, u) , donde

$$\begin{aligned}s &= x \cos \theta + y \sin \theta \\ u &= -x \sin \theta + y \cos \theta\end{aligned}$$

Usando el sistema de coordenadas (s, u) la ecuación (1.5.1) se puede expresar como:

$$\Re f(\theta, s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(s \cos \theta - u \sin \theta, s \sin \theta + u \cos \theta) du \quad (1.5.3)$$

Usando esta ecuación en la definición de $\widehat{\Re f}(\theta, \xi)$, se obtiene

$$\begin{aligned}\widehat{\Re f}(\theta, \xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \Re f(\theta, s) e^{-i\xi s} ds \\ \widehat{\Re f}(\theta, \xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(s \cos \theta - u \sin \theta, s \sin \theta + u \cos \theta) e^{-i\xi s} ds du\end{aligned}$$

Cambiando el sistema de coordenadas (s, u) a (x, y) , se obtiene:

$$\begin{aligned}\widehat{\Re f}(\theta, \xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-i(x\xi \cos \theta + y\xi \sin \theta)} dx dy \\ \widehat{\Re f}(\theta, \xi) &= \widehat{f}(\xi \cos \theta, \xi \sin \theta)\end{aligned}$$

□

1.5.2. La Transformada continua de Radon en \mathbb{R}^n

La transformada de Radon de una función $f(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$ está definida por:

$$\Re f(\theta, s) = \Re_{\theta} f(s) = \int_{\vec{x} \cdot \vec{\theta} = s} f(\vec{x}) d\vec{x} = \int_{\theta^{\perp}} f(s\vec{\theta} + y) dy$$

donde $\vec{\theta} = (\cos \theta, \sin \theta)$, $\theta \in [0, 2\pi)$, $s \in \mathbb{R}$ y θ^{\perp} es el subespacio perpendicular a $\vec{\theta}$.

$\Re f(\theta, s)$ representa la integral de línea de f en el hiperplano de \mathbb{R}^n perpendicular a θ y a una distancia s desde origen.

Los puntos en el subespacio θ^{\perp} están dados por $\theta^{\perp} = \{s\theta^{\perp} : s \in \mathbb{R}\}$.

Es fácil demostrar que la transformada de Radon cumple con, $\Re f(-\theta, s) = \Re f(\theta, -s)$.

Al igual que en los casos anteriores, la transformada de Radon continua en \mathbb{R}^n satisface el teorema **teorema de Slice de Fourier**, esto es, dada $f(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$ y $\theta \in S^{n-1}$ fijo,

$$\widehat{\mathfrak{R}_\theta f}(\gamma) = \widehat{f}(\gamma\theta) \quad (1.5.4)$$

para todo $\gamma \in \hat{\mathbb{R}}$ ($\hat{\mathbb{R}}$ representa el dual de \mathbb{R}).

Escribiendo la fórmula usual de inversión de Fourier en coordenadas polares tenemos:

$$f(x) = \int_{S_+^{n+1}} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{\mathfrak{R}_\theta f}(r) e^{2\pi i((x,\theta)r)} |r|^{n-1} dr d\theta \quad (1.5.5)$$

donde S_+^{n-1} denota la mitad superior de la esfera en \mathbb{R}^n .

La ecuación anterior se puede generalizar de la siguiente manera. Dado $\alpha \in \mathbb{R}$, se define el operador **potencial de Riesz**, I^α como:

$$\widehat{I^\alpha f}(\xi) = |\xi|^{-\alpha} \widehat{f}(\xi)$$

Si $\alpha < n$, entonces

$$f = \frac{1}{2} I^{-\alpha} \mathfrak{R}^\#(I^{\alpha+1-n} \mathfrak{R}_\theta f)$$

Vemos que $I^{-2} = -(2\pi)^{-2} \Delta$, donde Δ es el operador Laplaciano, y

$$\Delta f = -4\pi^2 I^{-2} f = -2\pi^2 I^{-\alpha-1} \mathfrak{R}^\#(I^{\alpha+1-n} \mathfrak{R}_\theta f)$$

I^{-1} es el operador Lambda y lo denotamos $I^{-1} = \Lambda$. Obsevamos que:

$$\Lambda f = I^{-1} f = \frac{1}{2} I^{-\alpha-1} \mathfrak{R}^\#(I^{\alpha+1-n} \mathfrak{R}_\theta f)$$

si hacemos $\alpha = -1$,

$$\Lambda f = \frac{1}{2} \mathfrak{R}^\#(I^{-n} \mathfrak{R}_\theta f)$$

Similarmente, el operador Λ^{-1} satisface:

$$\Lambda^{-1} f = \frac{1}{2} \mathfrak{R}^\#(I^{2-n} \mathfrak{R}_\theta f)$$

1.5.3. Propiedades básicas de la Transformada continua de Radon

A continuación se enuncian algunas propiedades fundamentales de la transformada de Radon en 2D, pero se cumplen también para \mathbb{R}^n : linealidad, desplazamiento y rotación.

1. Linealidad. $\mathfrak{R}(f_1 + f_2)(s, \theta) = \mathfrak{R}f_1(s, \theta) + \mathfrak{R}f_2(s, \theta)$

Es decir,

$$\begin{aligned}\mathfrak{R}(f_1 + f_2)(s, \theta) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (f_1(x, y) + f_2(x, y)) \delta(x \cos \theta + y \sin \theta - s) dx dy = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x, y) \delta(x \cos \theta + y \sin \theta - s) dx dy + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_2(x, y) \delta(x \cos \theta + y \sin \theta - s) dx dy \\ &= \mathfrak{R}f_1(s, \theta) + \mathfrak{R}f_2(s, \theta)\end{aligned}$$

2. Desplazamiento. Asumiendo que la función $f(x, y)$ es desplazada, es decir,

$$h(x, y) = f(x - x_0, y - y_0)$$

Entonces

$$\mathfrak{R}h(s, \theta) = \mathfrak{R}f(s - s_0, \theta) \text{ donde } s_0 = x_0 \cos \theta + y_0 \sin \theta$$

En efecto,

$$\begin{aligned}\mathfrak{R}h(s, \theta) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(x, y) \delta(x \cos \theta + y \sin \theta - s) dx dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x - x_0, y - y_0) \delta(x \cos \theta + y \sin \theta - s) dx dy\end{aligned}$$

$$\text{sea: } w = x - x_0, z = y - y_0 \Rightarrow dx = dw, dz = dy$$

$$\begin{aligned}\mathfrak{R}h(s, \theta) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(w, z) \delta((w + x_0) \cos \theta + (z + y_0) \sin \theta - s) dw dz \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(w, z) \delta(w \cos \theta + z \sin \theta + x_0 \cos \theta + y_0 \sin \theta - s) dw dz \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(w, z) \delta(w \cos \theta + z \sin \theta + s_0 - s) dw dz \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(w, z) \delta(w \cos \theta + z \sin \theta - (s - s_0)) dw dz \\ &= \mathfrak{R}f(s - s_0, \theta)\end{aligned}$$

Se puede ver de esta propiedad que sólo la coordenada s es movida.

3. Rotación. Expresando $f(x, y)$ en forma polar tenemos, $f(x, y) = f_p(r, \phi)$, si hacemos una rotación ϕ_0 , es decir sea $h(r, \phi) = f(r, \phi - \phi_0)$

Entonces:

$$\begin{aligned} \Re h(s, \theta) &= \Re f(s, \theta - \phi_0) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(r, \phi) \delta(r \cos \phi \cos \theta + r \sin \phi \sin \theta - s) |r| d\phi dr \\ \text{sea } \alpha &= \phi - \phi_0 \Rightarrow d\alpha = d\phi \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(r, \alpha) \delta(r \cos(\alpha - (\phi - \phi_0)) - s) |r| d\alpha dr \\ &= \Re f(s, \theta - \phi_0) \end{aligned}$$

Ejemplos

1. Consideremos un objeto sencillo sobre un fondo uniforme. Supongamos que la figura 1.2 representa un corte transversal del objeto.

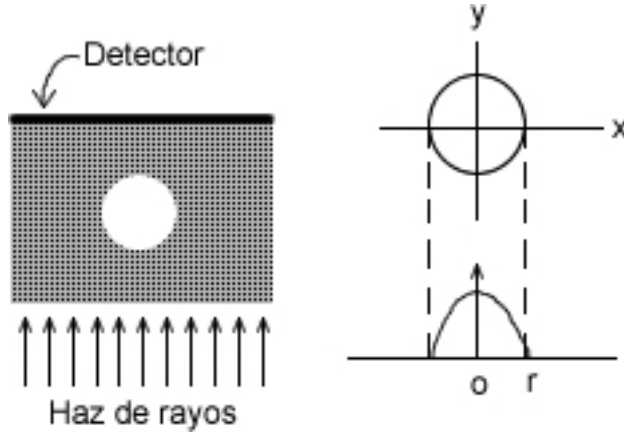


Figura 1.2: Corte transversal

Si suponemos que cuando un rayo pasa a través del cuerpo la atenuación es constante podemos representar dicha atenuación como una función $f(x, y)$ definida así,

$$f(x, y) = \begin{cases} A & \text{si } x^2 + y^2 \leq r^2 \\ 0 & \text{en otro valor} \end{cases}$$

(Suponemos que el objeto tiene centro en el origen)

22 Preliminares

La proyección de $f(x, y)$ en el detector estará dada por

$$\Re f(\theta, s) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \delta(x \cos \theta + y \sin \theta - s) dx dy$$

Como el cuerpo es simétrico respecto al origen la proyección será la misma para todos los valores de θ (es decir, no depende de θ), por lo tanto la calculamos para $\theta = 0$ con lo cual obtenemos

$$\begin{aligned} \Re f(\theta, s) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \delta(x - s) dx dy \\ \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \delta(x - s) dx &= f(s, y), \text{ luego} \\ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \delta(x - s) dx dy &= \int_{-\infty}^{\infty} f(s, y) dy \\ &\text{y como} \end{aligned}$$

$$f(s, y) = \begin{cases} A & \text{si } s^2 + y^2 \leq r^2 \\ 0 & \text{en otro valor} \end{cases}$$

$$f(s, y) = A \quad \text{si } -\sqrt{r^2 - s^2} \leq y \leq \sqrt{r^2 - s^2}, \text{ por lo tanto,}$$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \delta(x - s) dx dy &= \int_{-\sqrt{r^2 - s^2}}^{\sqrt{r^2 - s^2}} A dy = 2A\sqrt{r^2 - s^2} \\ &= g(\theta, s) = g(s) \end{aligned}$$

$$\text{donde } g(\theta, s) = \Re f(\theta, s)$$

es decir,

$$g(\theta, s) = g(s) = \begin{cases} 2A\sqrt{r^2 - s^2} & \text{si } |s| \leq r \\ 0 & \text{si } |s| > r \end{cases}$$

2. Calcular la Transformada de Radon de la función $f(x, y) = e^{-(x^2 + y^2)}$

Esta función en su forma polar es,

$$\begin{aligned} g(r, \theta) &= e^{-r^2}, \text{ luego,} \\ \Re g(s, \theta) &= \int_{-\infty}^{\infty} g(\sqrt{s^2 + u^2}, \theta + \arctan(u/s)) du \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(s^2 + u^2)} du = e^{-s^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} du = \pi^{1/2} e^{-s^2} \end{aligned}$$

3. Transformada de Radon del Shepp-Logan phantom.

En la figura 1.3 se muestra la imagen del phantom y su transformada de Radon.

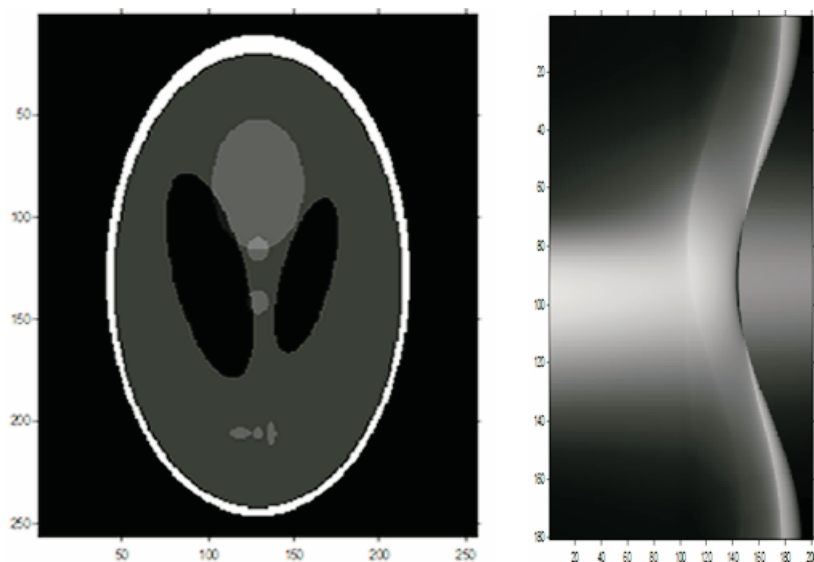


Figura 1.3: Phantom y su transformada de Radon

1.5.4. Operador Retroproyección

Otro operador fundamental para el estudio de la tomografía es el operador retroproyección, que se define como sigue:

Dada una función $h(\theta, t)$ definida en $S^{n-1} \times \mathbb{R}$, definimos el operador retroproyección $\mathfrak{R}^\#$ por

$$\mathfrak{R}^\# h(x) = \int_{S^{n-1}} h(\theta, x \cdot \theta) d\theta \quad (1.5.6)$$

donde el par (θ, t) es la parametrización del hiperplano $\{x : x \cdot \theta = t\}$, y la función h está definida en el hiperplano $(n - 1)$ -dimensional de \mathbb{R}^n . En este caso, $\mathfrak{R}^\# h(x)$ es la integral de h sobre todos los hiperplanos que pasan a través de x .

1.5.5. Fórmula de retroproyección filtrada

La ecuación (1.5.6) es la base para muchos proyectos de reconstrucción de la transformada de Radon.

Dado $f(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, $g(\theta, t) = g_\theta(t)$, $\theta \in S^{n-1}$, $t \in \mathbb{R}$,

24 Preliminares

$$f * \mathfrak{R}^\#(g_\theta)(x) = \mathfrak{R}^\#(\mathfrak{R}_\theta f * g_\theta)(x) \quad (1.5.7)$$

donde la convolución del lado izquierdo es con respecto a $x \in \mathbb{R}^n$ y de la parte derecha es con respecto a $t \in \mathbb{R}$.

En efecto, tenemos que:

$$\begin{aligned} f * \mathfrak{R}^\#(g_\theta)(x) &= \mathfrak{R}^\#(g_\theta) * f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \mathfrak{R}^\# g(x-y) f(y) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{S^{n-1}} g(\theta, (x-y) \cdot \theta) d\theta f(y) dy \\ &= \int_{S^{n-1}} \int_{\mathbb{R}^n} g(\theta, (x-y) \cdot \theta) f(y) dy d\theta \end{aligned}$$

haciendo la sustitución $y = s\theta + z$, $z \in \theta^\perp$ en la integral anterior, obtenemos:

$$\begin{aligned} \mathfrak{R}^\#(g_\theta) * f(x) &= \int_{S^{n-1}} \int_{\mathbb{R}^1} \int_{\theta^\perp} g(\theta, x \cdot \theta - s) f(s\theta + z) dz ds d\theta \\ &= \int_{S^{n-1}} \int_{\mathbb{R}^1} g(\theta, x \cdot \theta - s) \mathfrak{R}f(\theta, s) ds d\theta \end{aligned}$$

Luego,

$$\mathfrak{R}^\#(g_\theta) * f(x) = R^\#(g_\theta * \mathfrak{R}_\theta f)(x) \quad (1.5.8)$$

Esto quiere decir que si g se determina de modo que $\mathfrak{R}^\#g$ se aproxima a δ -función, entonces una buena aproximación de f se puede obtener por convolución simple y retroproyección. Guédon y Unser han utilizado este método para calcular los cuadrados de las proyecciones de funciones polinómicas suaves a trazos con nodos espaciados uniformemente [30].

CAPÍTULO 2

Introducción a las wavelets

2.1. Introducción

El origen de la descomposición de una señal en wavelets está en la necesidad de conocer las características y particularidades de la señal en diferentes instantes de tiempo. La principal virtud de las wavelets es que permite modelar procesos que dependen fuertemente del tiempo y para los cuales su comportamiento no tiene porqué ser suave [1], [9], [10], [13], [20]. Una de las ventajas de las wavelets frente a los métodos clásicos, como la transformada de Fourier, es que en el segundo caso se maneja una base de funciones bien localizada en frecuencia pero no en tiempo, esto es, el análisis en frecuencia obtenido del análisis de Fourier es insensible a perturbaciones que supongan variaciones instantáneas y puntuales de la señal como picos debidos a conmutaciones o variaciones muy lentas como tendencias. La transformada de Fourier $\hat{f}(\omega)$ proporciona la información global de la señal en el tiempo localizada en frecuencia. Sin embargo, $\hat{f}(\omega)$ no particulariza la información para intervalos de tiempo específicos, ya que

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt$$

y la integración es sobre todo tiempo (ver [9]). Así, la imagen obtenida no contiene información sobre tiempos específicos, sino que sólo permite calcular

el espectro de amplitud total $|\hat{f}(\omega)|$, mientras que la mayoría de las wavelets interesantes presentan una buena localización en tiempo y en frecuencia, disponiendo incluso de bases de wavelets con soporte compacto.

En este capítulo se presenta una introducción a la transformada wavelet y al análisis multiresolución.

2.2. Transformadas wavelets

El análisis wavelets es un método de descomposición de una función o señal usando funciones especiales, las wavelets. La descomposición es similar a la de la transformada de Fourier, donde una señal $f(t)$ se descompone en una suma infinita de armónicos $e^{i\omega t}$ de frecuencias $\omega \in \mathbb{R}$, cuyas amplitudes son los valores de la transformada de Fourier de f , $\hat{f}(\omega)$:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega, \quad \text{donde} \quad \hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt.$$

El análisis de Fourier tiene el defecto de la no localidad: el comportamiento de una función en un conjunto abierto, no importa cuán pequeño, influye en el comportamiento global de la transformada de Fourier. No se captan los aspectos locales de la señal tales como cambios bruscos, saltos o picos, que se han de determinar a partir de su reconstrucción.

2.2.1. Transformada wavelet continua

La teoría wavelets se basa en la representación de una función en términos de una familia biparamétrica de dilataciones y traslaciones de una función fija ψ , la wavelet madre que, en general, no es senoidal. Por ejemplo,

$$f(t) = \int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{\sqrt{|a|}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \mathcal{W}_\psi f(a, b) da db$$

en donde $\mathcal{W}_\psi f$ es una transformada de f definida adecuadamente.

Se define el operador isotrópico n -dimensional, D_a , con $a > 0$, y sea $f^\vee(\mathbf{x}) = f(-\mathbf{x})$ para $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ como:

$$D_a f(\mathbf{x}) = a^{-n/2} f(\mathbf{x}/a)$$

entonces la transformada wavelet continua también se puede escribir como:

$$W_\psi f(a, b) = f * D_a \psi^\vee(b)$$

Y en forma discreta se tiene un desarrollo en serie:

$$f(t) = \sum_{j,k} c_{j,k} 2^{j/2} \psi(2^j t - k)$$

en donde se suma sobre las dilataciones en progresión geométrica. Para conservar la norma en $L_2(\mathbb{R})$ de la wavelet madre ψ , se insertan los factores $\frac{1}{\sqrt{|a|}}$ y $2^{j/2}$, respectivamente.

Definición 2.2.1. *Una wavelet ψ es una función cuadrado integrable tal que la siguiente condición de admisibilidad se tiene:*

$$C_\psi := \int_{\mathbb{R}} \frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega < \infty, \quad (2.2.1)$$

donde $\hat{\psi}(\omega)$ es la transformada de Fourier de ψ .

Observación 2.2.1. Si además $\psi \in L_1(\mathbb{R})$, entonces la condición (2.2.1) implica que $\int_{\mathbb{R}} \psi(t) dt = 0$. En efecto, por el Lema de Riemann-Lebesgue (ver p.e., [10]), $\lim_{\omega \rightarrow \infty} \hat{\psi}(\omega) = 0$ y la transformada de Fourier es continua, lo cual implica que $0 = \hat{\psi}(0) = \int_{\mathbb{R}} \psi(t) dt$.

Sea $\psi \in L_2(\mathbb{R})$. La función dilatada y trasladada se define por

$$\psi_{a,b}(t) := \frac{1}{\sqrt{|a|}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right), \quad a, b \in \mathbb{R}, \quad a \neq 0.$$

Esta función se obtiene a partir de ψ , primero por dilatación en el factor a y, luego, por traslación en b . Es claro que $\|\psi_{a,b}\|_2 = \|\psi\|_2$.

Definición 2.2.2. *Para $f, \psi \in L_2(\mathbb{R})$, la expresión:*

$$\mathcal{W}_\psi f(a, b) := \int_{\mathbb{R}} f(t) \overline{\psi_{a,b}(t)} dt \quad (2.2.2)$$

se llama la transformada wavelet de f .

28 Introducción a las wavelets

Por la desigualdad de Cauchy, se ve que $\mathcal{W}_\psi f$ es una función acotada con $|\mathcal{W}_\psi f(a, b)| \leq \|f\|_2 \|\psi\|_2$. Note también que

$$\mathcal{W}_\psi f(a, b) = \langle f, \psi_{a,b} \rangle_{L_2(\mathbb{R})} = \langle f, \psi_{a,b} \rangle.$$

La transformada wavelet $\mathcal{W}_\psi f$ de f puede ser descrita en términos del producto de convolución. La convolución de dos funciones $f, g \in L_2(\mathbb{R})$ es dada por

$$(f * g)(t) = \int_{\mathbb{R}} f(t - z)g(z)dz.$$

Observe que esta fórmula está definida para al menos todo $t \in \mathbb{R}$, pero $f * g$ no necesariamente está en $L_2(\mathbb{R})$. Usando la notación $\tilde{\psi}(t) = \overline{\psi(-t)}$, se tiene $\mathcal{W}_\psi f(a, b) = (f * \tilde{\psi}_{a,0})(b)$. Note también que $\hat{\psi}_{a,b}(\omega) = \sqrt{|a|} \hat{\psi}(a\omega) e^{-i\omega b}$. Estos hechos se aplicarán en la prueba de la siguiente proposición, la cual establece la fórmula de Plancherel para la transformada wavelet.

Proposición 2.2.3. *Sea $\psi \in L_2(\mathbb{R})$ y satisface la condición (2.2.1). Entonces para cualquier $f \in L_2(\mathbb{R})$, las siguientes relaciones se tienen*

1. *Isometría*

$$\int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{C_\psi} \int_{\mathbb{R}^2} |\mathcal{W}_\psi f(a, b)|^2 db \frac{da}{a^2}$$

2. *Fórmula de inversión*

$$f(t) = \frac{1}{C_\psi} \int_{\mathbb{R}^2} \mathcal{W}_\psi f(a, b) \psi_{a,b}(t) db \frac{da}{a^2}$$

Demostración. 1. Es fácil verificar que $(f * \tilde{\psi}_{a,0})(b) = \sqrt{|a|} \mathcal{F}^{-1}\{\hat{f}(\omega) \hat{\psi}(a\omega)\}$. En consecuencia,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} |\mathcal{W}_\psi f(a, b)|^2 db \frac{da}{a^2} &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |(f * \tilde{\psi}_{a,0})(b)|^2 db \frac{da}{a^2} \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |a| |\mathcal{F}^{-1}(\hat{f}(\cdot) \hat{\psi}(a\cdot))(\omega)|^2 d\omega \frac{da}{a^2} \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |\hat{f}(\omega)|^2 |\hat{\psi}(a\omega)|^2 d\omega \frac{da}{|a|} \\ &= \int_{\mathbb{R}} |\hat{f}(\omega)|^2 \left[\int_{\mathbb{R}} |\hat{\psi}(a\omega)|^2 \frac{da}{|a|} \right] d\omega \\ &= C_\psi \int_{\mathbb{R}} |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega = C_\psi \|f\|_2^2. \end{aligned}$$

Observe que se utilizó el teorema de Fubini y la fórmula de Plancherel para la transformada de Fourier.

2. Para simplificar los cálculos en la fórmula de inversión, suponga que $f, \hat{f} \in L_1(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \mathcal{W}_\psi f(a, b) \psi_{a,b}(t) db &= \sqrt{|a|} \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}^{-1}(\hat{f}(\cdot) \tilde{\psi}(a \cdot))(\omega) \psi_{a,b}(t) d\omega \\ &= \sqrt{|a|} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\omega) \tilde{\psi}(a \omega) \mathcal{F}^{-1}(g)(\omega) d\omega, \end{aligned}$$

donde $g(b) := \psi_{a,b}(t)$. Ahora, la transformada inversa de Fourier de g es

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{-1}(g)(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} g(b) e^{i\omega b} db \\ &= \frac{1}{2\pi} \sqrt{|a|} \int_{\mathbb{R}} \psi(z) e^{-ia\omega z} e^{i\omega t} dz \\ &= \frac{1}{2\pi} \sqrt{|a|} \hat{\psi}(a \omega) e^{i\omega t}. \end{aligned}$$

Sustituyendo e integrando respecto a $a^{-2} da$ se obtiene

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} \mathcal{W}_\psi f(a, b) \psi_{a,b}(t) db \frac{da}{a^2} &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} |a| \left[\int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\omega) |\hat{\psi}(a \omega)|^2 e^{i\omega t} d\omega \right] \frac{da}{a^2} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\omega) \left[\int_{\mathbb{R}} |\hat{\psi}(a \omega)|^2 \frac{da}{|a|} \right] e^{i\omega t} d\omega \\ &= C_\psi \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega \\ &= C_\psi f(t). \end{aligned}$$

□

Otro resultado de interés que se presentará en la siguiente proposición, es la fórmula de Parseval para la transformada wavelet.

Proposición 2.2.4. *Sea $\psi \in L_2(\mathbb{R})$ y satisfice la condición (2.2.1). Entonces para cualquier $f, g \in L_2(\mathbb{R})$, se tienen*

$$\langle f, g \rangle_{L_2(\mathbb{R})} = \frac{1}{C_\psi} \int_{\mathbb{R}^2} \mathcal{W}_\psi f(a, b) \overline{\mathcal{W}_\psi g(a, b)} \frac{da db}{a^2}$$

30 Introducción a las wavelets

Demostración. Como $(f * \tilde{\psi}_{a,0})(b) = \sqrt{|a|} \mathcal{F}^{-1}\{\hat{f}(\omega) \tilde{\hat{\psi}}(a\omega)\}$ o de manera equivalente, $\mathcal{F}(f * \tilde{\psi}_{a,0})(\omega) = \sqrt{|a|} \hat{f}(\omega) \tilde{\hat{\psi}}(a\omega)$, entonces

$$\int_{\mathbb{R}} \mathcal{W}_{\psi} f(a, b) \overline{\mathcal{W}_{\psi} g(a, b)} db = |a| \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\omega) \tilde{\hat{g}}(\omega) |\hat{\psi}(a\omega)|^2 d\omega,$$

ahora, integrando respecto a $a^{-2} da$ se sigue

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} \mathcal{W}_{\psi} f(a, b) \overline{\mathcal{W}_{\psi} g(a, b)} db \frac{da}{a^2} &= \int_{\mathbb{R}} |a| \left[\int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\omega) \tilde{\hat{g}}(\omega) |\hat{\psi}(a\omega)|^2 d\omega \right] \frac{da}{a^2} \\ &= \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\omega) \tilde{\hat{g}}(\omega) \left[\int_{\mathbb{R}} |\hat{\psi}(a\omega)|^2 \frac{da}{|a|} \right] d\omega \\ &= C_{\psi} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\omega) \tilde{\hat{g}}(\omega) d\omega \\ &= C_{\psi} \langle \hat{f}, \hat{g} \rangle_{L_2(\mathbb{R})} = C_{\psi} \langle f, g \rangle_{L_2(\mathbb{R})}. \end{aligned}$$

Note que se aplicó el teorema de Fubini, y en el último renglón de la expresión anterior, la fórmula de Parseval para la transformada de Fourier. \square

En la siguiente proposición se listan algunas propiedades.

Proposición 2.2.5. Sean ψ y φ wavelets y $f, g \in L_2(\mathbb{R})$. Entonces

1. $\mathcal{W}_{\psi}(\alpha f + \beta g)(a, b) = \alpha \mathcal{W}_{\psi} f(a, b) + \beta \mathcal{W}_{\psi} g(a, b)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
2. $\mathcal{W}_{\alpha\psi + \beta\varphi} f(a, b) = \alpha \mathcal{W}_{\psi} f(a, b) + \beta \mathcal{W}_{\varphi} f(a, b)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
3. $\mathcal{W}_{\psi}(T_c f)(a, b) = \mathcal{W}_{\psi} f(a, b - c)$, donde T_c es el operador traslación definido por $T_c f(t) = f(t - c)$.
4. $\mathcal{W}_{\psi}(D_c f)(a, b) = \sqrt{c} \mathcal{W}_{\psi} f(ca, cb)$, donde D_c es el operador dilatación definido por $D_c f(t) = \sqrt{c} f(ct)$.

2.2.2. Transformada wavelet discreta

La transformada wavelet continua introduce cierta redundancia, pues la señal original se puede reconstruir completamente calculando $\mathcal{W}_{\psi} f(a, \cdot)$ para una cantidad numerable de escalas, por ejemplo, potencias enteras de 2. Esto es, si se elige la escala $a = 2^{-j}$ para cada $j \in \mathbb{Z}$, y también se discretiza en

el dominio del tiempo en los puntos $b = 2^{-j}k$, $k \in \mathbb{Z}$, la familia de wavelets será ahora dada por:

$$\psi_{2^{-j}, 2^{-j}k}(t) = \frac{1}{\sqrt{2^{-j}}} \psi\left(\frac{t - 2^{-j}k}{2^{-j}}\right) = 2^{j/2} \psi(2^j t - k), \quad \forall j, k \in \mathbb{Z}.$$

Se utilizará la notación ψ_{jk} para denotar la wavelet ψ comprimida 2^j y trasladada el entero k , es decir, $\psi_{jk}(t) = 2^{j/2} \psi(2^j t - k)$.

Con la elección de $a = 2^{-j}$ y $b = 2^{-j}k$, observe que el muestreo en el tiempo se ajusta proporcionalmente a la escala, es decir, a mayor escala se toma puntos más distantes, ya que se busca información global, mientras que a menor escala se buscan detalles de la señal, por tal motivo se muestrea en puntos menos distantes entre si. Para otras elecciones de a y b se puede consultar [13].

Definición 2.2.6. Una función $\psi \in L_2(\mathbb{R})$ es una wavelet si la familia de funciones ψ_{jk} definidas por:

$$\psi_{jk}(t) = 2^{j/2} \psi(2^j t - k), \quad \forall j, k \in \mathbb{Z}, \quad (2.2.3)$$

es una base ortonormal en el espacio $L_2(\mathbb{R})$.

Una condición suficiente para la reconstrucción de una señal f es que la familia de dilatadas y trasladadas ψ_{jk} forme una base ortonormal en el espacio $L_2(\mathbb{R})$, ver [14] y [32] para más detalles. Si esto se tiene, cualquier función $f \in L_2(\mathbb{R})$ se puede escribir como:

$$f(t) = \sum_{j,k} c_{j,k} \psi_{jk}(t) \quad (2.2.4)$$

o teniendo en cuenta (2.2.3) como:

$$f(t) = \sum_{j,k} c_{j,k} 2^{j/2} \psi(2^j t - k),$$

donde $c_{j,k} = \langle f, \psi_{2^{-j}, 2^{-j}k} \rangle = \mathcal{W}_\psi f(2^{-j}, 2^{-j}k)$.

Definición 2.2.7. Para cada $f \in L_2(\mathbb{R})$ el conjunto bidimensional de coeficientes

$$c_{j,k} = \langle f, \psi_{jk} \rangle = \int_{\mathbb{R}} 2^{j/2} f(t) \overline{\psi(2^j t - k)} dt$$

se llama la transformada wavelet discreta de f .

32 Introducción a las wavelets

En consecuencia, la expresión (2.2.4) se puede escribir en forma alterna como:

$$f(t) = \sum_{j,k} \langle f(t), \psi_{jk}(t) \rangle \psi_{jk}(t). \quad (2.2.5)$$

La serie (2.2.5) se llama representación wavelet de f .

Observación 2.2.2. $\psi_{jk}(t)$ es muy apropiada para representar detalles más finos de la señal como oscilaciones rápidas. Los coeficientes wavelet $c_{j,k}$ miden la cantidad de fluctuaciones sobre el punto $t = 2^{-j}k$ con una frecuencia determinada por el índice de dilatación j .

Es interesante notar que $c_{j,k} = \mathcal{W}_\psi f(2^{-j}, 2^{-j}k)$ es la transformada wavelet de f en el punto $(2^{-j}, 2^{-j}k)$. Estos coeficientes analizan la señal mediante la wavelet madre ψ .

Para conservar la norma en $f \in L^2(\mathbb{R})$ de la wavelet madre ψ , se incluye el factor $a^{-1/2}$, con lo cual $\|\psi_{b,a}\| = \|\psi\|$.

La transformada wavelet también la podemos escribir como el producto punto de f y ψ :

$$\mathcal{W}_\psi f(b, a) = \langle f, \psi_{b,a} \rangle \quad (2.2.6)$$

Al hacer uso de la relación de Parseval se obtiene:

$$\mathcal{W}_\psi f(b, a) = \frac{1}{2\pi} \langle \widehat{f}, \widehat{\psi_{b,a}} \rangle = \sqrt{|a|} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(w) \overline{\widehat{\psi_{b,a}}(aw)} e^{iwb} dw \quad (2.2.7)$$

Para recuperar $f(t)$ desde su transformada wavelet, $\psi(t)$ debe satisfacer las siguiente condición:

$$\widehat{\psi}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) dt = 0 \quad (2.2.8)$$

Además de satisfacer la ecuación anterior, las wavelets se construyen de modo que tengan soporte compacto y un alto orden de desvanecimiento. Una wavelet se dice que tiene momentos de desvanecimiento de orden m si

$$\int_{\mathbb{R}} t^p \psi(t) dt = 0, \quad p = 0, 1, \dots, m-1 \quad (2.2.9)$$

La expresión para la transformada wavelet inversa es,

$$f(t) = \frac{1}{C_\psi} \int_{\mathbb{R}} db \int_0^\infty \frac{1}{a^2} [\mathcal{W}_\psi f(b, a) \psi_{b,a}(t) da \quad (2.2.10)$$

la cual permite reconstruir la función original desde su transformada wavelet. Y donde C_ψ es una constante que depende de la elección de la wavelet y se conoce como *condición de admisibilidad*

Para una función de dos variables, la transformada wavelet continua bidimensional se define como

$$\mathcal{W}_\psi f(a, b_{x_1}, b_{x_2}) = \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty f(x_1, x_2) \overline{\psi_{a, b_{x_1}, b_{x_2}}(x_1, x_2)} dx_1 dx_2 \quad (2.2.11)$$

donde b_{x_1} y b_{x_2} indican las translaciones en dos dimensiones y

$$\psi_{a, b_{x_1}, b_{x_2}}(x_1, x_2) = \frac{1}{|a|} \psi \left(\frac{x_1 - b_{x_1}}{a}, \frac{x_2 - b_{x_2}}{a} \right) \quad (2.2.12)$$

siendo $\psi(x_1, x_2)$ una función wavelet madre bidimensional. La transformación inversa correspondiente es:

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{C_\psi} \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{a^3} [\mathcal{W}_\psi f(a, b_{x_1}, b_{x_2}) \psi_{a, b_{x_1}, b_{x_2}}(x_1, x_2)] db_{x_1} db_{x_2} da$$

La misma generalización puede ser extendida al caso n -dimensional.

2.2.3. Transformada wavelet semicontinua

Se considera sólo el caso planar ($n = 2$). Sea $G(x)$ una función radial en \mathbb{R}^2 que satisface $\int_{\mathbb{R}^2} G(x) dx = 1$. Sea:

$$\psi^1(x) = \frac{\partial}{\partial x_1} \quad (2.2.13)$$

$$\psi^2(x) = \frac{\partial}{\partial x_2} \quad (2.2.14)$$

entonces, la transformada wavelet semicontinua de una función $f(x)$, se define por

$$\{(\mathcal{W}_{\psi^1} f)(2^j, x), (\mathcal{W}_{\psi^2} f)(2^j, x)\}_{j \in \mathbb{Z}, x \in \mathbb{R}^2} \quad (2.2.15)$$

2.2.4. Transformada Rápida Wavelet

La transformada Rápida Wavelet [13], es una implementación computacionalmente eficiente de la transformada wavelet discreta que aprovecha la relación entre los coeficientes de la transformada wavelet discreta y escalas adyacentes, lo que se expresa de la siguiente manera:

$$\mathcal{W}_\psi(j, k) = \sum_m h_\psi(m - 2k) W_\phi(j + 1, m) \quad (2.2.16)$$

y

$$\mathcal{W}_\phi(j, k) = \sum_m h_\phi(m - 2k) W_\phi(j + 1, m) \quad (2.2.17)$$

Las anteriores ecuaciones pueden ser expresadas mediante la convolución, con los coeficientes wavelet y de escalamiento invertidos en el tiempo (descomposición), es decir,

$$\mathcal{W}_\psi(j, k) = h_\psi(-n) * W_\phi(j + 1, m)|_{n=2k, k \geq 0} \quad (2.2.18)$$

y

$$\mathcal{W}_\phi(j, k) = h_\phi(-n) * W_\phi(j + 1, m)|_{n=2k, k \geq 0} \quad (2.2.19)$$

donde las convoluciones son evaluadas en instantes $n = 2k$ para $k \geq 0$.

2.3. Análisis Multiresolución

Presentamos una visión general para la construcción de funciones $\psi(x) \in L^2(\mathbb{R})$, de tal manera que la sucesión

$$\{\psi_{j,k}(x)\}_{j,k \in \mathbb{Z}} = \{2^{j/2} \psi(2^j x - k)\}_{j,k \in \mathbb{Z}} \quad (2.3.1)$$

sea una base ortonormal en \mathbb{R} . El concepto de análisis multirresolución fue desarrollado por Meyer y Mallat, y como lo sugieren, aplicando este tipo de análisis a una función, se puede descomponer en funciones más simples y estudiarlas separadamente.

Considérese una función como la que se presenta en la figura 2.1

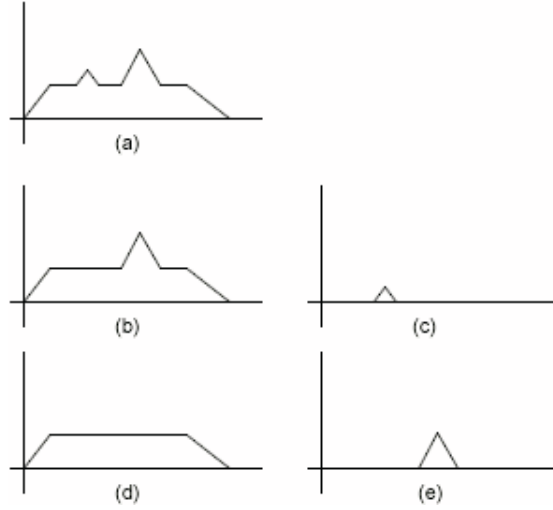


Figura 2.1: Representación multinivel de una función

Cada vez que vamos un nivel hacia abajo eliminamos ciertas partes (trozos) de la función, que se muestran al lado derecho. Esta aproximación de la función original se puede volver a dividir en dos partes, eliminando aun más detalles. Este proceso de ir eliminando detalles de la función original se conoce como proceso de **descomposición**. Vemos que la función original puede ser nuevamente recuperada si vamos añadiendo a la última aproximación obtenida todos los detalles que hemos eliminado. Este proceso se conoce como **reconstrucción**.

En la Figura 2.1, vamos a asignar a todas las funciones de la izquierda a V_j , y las de la derecha W_j , donde j representa escalas individuales. V_j es generado por las bases $\{\varphi_{j,k} : 2^{j/2}\varphi(2^j t - k)\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$ y W_j por $\{\psi_{j,k}(x)\}_{j,k \in \mathbb{Z}} = \{2^{j/2}\psi(2^j x - k)\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$. En otras palabras, las funciones arbitrarias $x_s(t)$ y $y_s(t)$ pueden ser representadas como combinación lineal de $\varphi_{j,k}$ y $\psi_{j,k}$ respectivamente. Vemos que las dos funciones $x_{j-1}(t) \in V_{j-1}$ y $y_{s-1}(t) \in W_{s-1}$ se derivan de $x_s \in V_s$. Por lo tanto, debemos esperar que las bases $\varphi_{j-1,k}$ de V_{s-1} y $\psi_{j-1,k}$ de W_{s-1} estén relacionadas con las bases $\varphi_{j,k}$ de V_s .

Para lograr un análisis multiresolución de una función como la de la figura 2.1, debemos tener una función de energía finita $\varphi(t) \in L^2(\mathbb{R})$, llamada **función escala**, que genera una sucesión anidada V_j , es decir,

$$\{0\} \leftarrow \cdots \subset V_{-1} \subset V_0 \subset V_1 \cdots \rightarrow L^2 \quad (2.3.2)$$

y satisface la ecuación de dilatación o de refinamiento:

$$\varphi(t) = \sum_k h_0[k] \varphi(at - k) \quad (2.3.3)$$

para algún $a > 0$ y los coeficientes $h_0[k] \in l^2$.

Si $a = 2$, la función $\varphi(t)$ está representada como una superposición de versiones trasladadas y escaladas de ella misma, de ahí el término función escalada. En particular, V_0 es generado por $\{\varphi(\cdot, -k) : k \in \mathbb{Z}\}$, y en general, V_s por $\{\phi_{j,k} : j, k \in \mathbb{Z}\}$. Luego se tienen los siguientes resultados:

$$x(t) \in V_j \Leftrightarrow x(2t) \in V_{j+1} \quad (2.3.4)$$

Para cada j , ya que V_j es un subespacio propio de V_{j+1} , hay algún espacio izquierdo en V_{j+1} , llamado W_j , que cuando se combina con V_j nos da un V_{j+1} . Este espacio W_j se llama el subespacio wavelet y es complementario de V_j en V_{j+1} , es decir,

$$V_j \cap W_j = \{0\}, \quad j \in \mathbb{Z} \quad (2.3.5)$$

y

$$V_j \oplus W_j = V_{j+1} \quad (2.3.6)$$

Los subespacios W_j son generados por $\psi(t) \in L^2$, y los V_j son generados por $\varphi(t)$. En otras palabras, cualquier función $x_j(t) \in V_j$ puede escribirse como:

$$x_j(t) = \sum_k v_{j,k} \varphi(2^j t - k) \quad (2.3.7)$$

y cualquier función $y_j(t) \in W_j$ puede escribirse como:

$$y_j(t) = \sum_k w_{j,k} \psi(2^j t - k) \quad (2.3.8)$$

para algunos coeficientes $\{v_{j,k}\}_{k \in \mathbb{Z}} \in l_2$, $\{w_{j,k}\}_{k \in \mathbb{Z}} \in l_2$.

Ya que:

$$V_{j+1} = W_j \oplus V_j = W_j \oplus W_{j-1} \oplus V_{j-1} = W_j \oplus W_{j-1} \oplus W_{j-2} \oplus \dots$$

es decir,

$$V_j = \bigoplus_{l=-\infty}^{j-1} W_l \quad (2.3.9)$$

Se observa que los V_j están anidados, mientras que los W_j son mutuamente ortogonales. En consecuencia, se tiene:

$$V_l \cap V_m = V_l, \quad m \geq l$$

$$W_l \cap W_m = \{0\}, \quad m \neq l$$

$$V_l \cap W_m = \{0\}, \quad l \leq m$$

En la figura 2.2 se muestra la relación jerárquica de V_s y W_s .

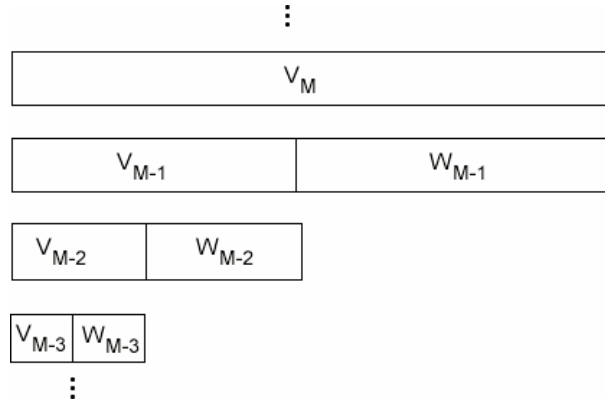


Figura 2.2: División de subespacios en un AMR

Definición 2.3.1. *Formalmente, un Análisis Multiresolución (AMR) sobre \mathbb{R} consiste de una sucesión de subespacios cerrados $\{V_j : j \in \mathbb{Z}\}$ de $L^2(\mathbb{R})$, que satisfacen:*

1. $V_j \subset V_{j-1}; \forall j \in \mathbb{Z}$ (cadena de subespacios encajonados).

2. $\overline{\cup_{j \in \mathbb{Z}} V_j} = L^2(\mathbb{R})$, es decir $\cup_{j \in \mathbb{Z}} V_j$ es densa en $L^2(\mathbb{R})$.
3. $\cap_{j \in \mathbb{Z}} V_j = \{0\}$.
4. $f(x) \in V_j$ si y sólo si $f(2^j x) \in V_0$.
5. $f(x) \in V_0$ si y sólo si $f(x - k) \in V_0$, para todo $k \in \mathbb{Z}$, además, por (4) se tiene que si $f(x) \in V_j$, entonces $f(x - 2^j k) \in V_j$, para todo $k \in \mathbb{Z}$.
6. Existe $\phi \in V_0$ tal que $\{\phi_{0,k} : k \in \mathbb{Z}\}$ es una base ortonormal V_0 .

Se observa que todos los espacios $\{V_j : j \in \mathbb{Z}\}$ son versiones escaladas del espacio central V_0 .

2.3.1. Base Ortonormal de wavelets $\psi_{j,k}$ y la Proyección Ortogonal P_j sobre V_j

Sea la función $\phi_{j,k}(x) = 2^{-j/2} \phi(2^{-j}x - k)$, para todo $j, k \in \mathbb{Z}$. Entonces por la parte (4) y (6) de la definición 2.3.1 se tiene que: $\{\phi_{j,k} : k \in \mathbb{Z}\}$ es una base ortonormal de V_j para todo $j \in \mathbb{Z}$. En este contexto, conociendo ϕ y utilizando el criterio básico de AMR se construye la wavelet ψ . El criterio afirma lo siguiente:

Cuando una colección de subespacios cerrados $\{V_j\}$ satisfacen las condiciones anteriores, entonces existe una base ortonormal de wavelets $\{\psi_{j,k}\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$ de $L_2(\mathbb{R})$, con $\psi_{j,k}(x) = 2^{-j/2} \psi(2^{-j}x - k)$, tal que para toda $f \in L^2(\mathbb{R})$,

$$P_{j-1}f = P_j f + \sum_k \langle f, \psi_{j,k} \rangle \psi_{j,k} \quad (2.3.10)$$

donde P_j es el operador proyección ortogonal sobre V_j .

La wavelet ψ a ser considerada posteriormente está en el complemento ortogonal de V_0 , lo cual se denota como W_0 . A ϕ se le llama la función escala del Análisis Multiresolución.

La wavelet ψ es construida explícitamente de la siguiente manera: para todo $j \in \mathbb{Z}$, definimos $W_j = V_j^\perp$ en V_{j-1} .

Como los $\varphi_{j,k}$, $\psi_{j,k}$ son bases ortogonales de V_j y W_j respectivamente y mutuamente ortogonales, entonces se tiene

$$\sum_k \langle f, \varphi_{j-1,k} \rangle \varphi_{j-1,k} = \sum_k \langle f, \varphi_{j,k} \rangle \varphi_{j,k} + \sum_k \langle f, \psi_{j,k} \rangle \psi_{j,k} \quad (2.3.11)$$

$$\sum_k \langle f, \varphi_{j-1,k} \rangle \varphi_{j-1,k} = \sum_k [\langle f, \varphi_{j,k} \rangle \varphi_{j,k} + \langle f, \psi_{j,k} \rangle \psi_{j,k}] \quad (2.3.12)$$

Luego,

$$V_{j-1} = V_j \oplus W_j \quad (2.3.13)$$

Se observa que $\phi_{j,k}$ es una base ortonormal de V_{j-1} , por lo tanto, si $f \in V_{j-1}$, entonces:

$$f(x) = \sum_k a_k \varphi_{j-1,k} \quad (2.3.14)$$

donde $a_k = \langle f, \varphi_{j-1,k} \rangle$. Análogamente, para las bases ortogonales $\varphi_{j,k}$ y $\psi_{j,k}$ se tiene que:

$$f_1(x) = \sum_k \langle f, \varphi_{j,k} \rangle \varphi_{j,k} \in V_j \quad (2.3.15)$$

y

$$f_2(x) = \sum_k \langle f, \psi_{j,k} \rangle \psi_{j,k} \in W_j \quad (2.3.16)$$

Luego, $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$. Como $W_j = V_j^\perp$ es un subespacio cerrado en V_{j-1} , entonces existe un subespacio V_j tal que $V_{j-1} = V_j \oplus W_j$.

Por otra parte, la familia $\{W_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ es mutuamente ortogonal, es decir, $W_j \perp W_{j'}$ si $j \neq j'$.

En efecto, supongamos que $j > j'$, entonces $W_j \subset V_{j'}^\perp \perp W_{j'}$ y así $W_j \perp W_{j'}$.

Además, para $j < J$ tenemos que:

$$V_j = V_J \oplus \bigoplus_{k=0}^{J-j-1} W_{J-k} \quad (2.3.17)$$

Y por la parte (2) y (3) de la definición 2.3.1 se tiene que:

$$L^2(\mathbb{R}) = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} W_j \quad (2.3.18)$$

La demostración se puede ver en [29].

Los espacios W_j heredan la propiedad de escala de los V_j ,

$$f(x) \in W_j \text{ si y solo si } f(2^j x) \in W_0$$

esta propiedad nos permite afirmar, gracias a la descomposición,

$$P_{j-1}f = P_j f + \sum_k \langle f, \psi_{j,k} \rangle \psi_{j,k}, \quad \forall f \in L^2(\mathbb{R}) \quad (2.3.19)$$

que para un j fijo, $\{\psi_{j,k} : k \in \mathbb{Z}\}$ constituye una base ortonormal para W_j , donde $\psi_{j,k}(x) = 2^{-j/2} \psi(2^{-j}x - k)$. Y por (1), la familia $\{\psi_{j,k}\}_{k \in \mathbb{Z}}$ es una base ortonormal para $L^2(\mathbb{R})$, Y $\{\psi_{0,k}\}_{k \in \mathbb{Z}}$ es una base ortonormal para W_0 .

2.3.2. Propiedades de φ y W_0

a) Si $\varphi \in V_0 \subset V_{-1}$ y $\{\varphi_{-1,n}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ es una base ortonormal para V_{-1} , entonces

$$\varphi = \sum_n h_n \varphi_{-1,n} \quad (2.3.20)$$

donde

$$h_n = \langle \varphi, \varphi_{-1,n} \rangle \quad \text{y} \quad \sum_{n \in \mathbb{Z}} |h_n|^2 = 1$$

Entonces (2.3.20) puede ser expresado como

$$\varphi(x) = 2^{1/2} \sum_n h_n \varphi(2x - n) \quad (2.3.21)$$

o

$$\widehat{\varphi}(\xi) = 2^{-1/2} \sum_n h_n e^{-kn/2} \widehat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2}\right) \quad (2.3.22)$$

Por lo tanto,

$$\widehat{\varphi}(\xi) = m_0\left(\frac{\xi}{2}\right) \widehat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2}\right)$$

donde $m_0 = 2^{-1/2} \sum_n h_n e^{-i\xi n}$.

Además, $m_0(\xi)$ es una función 2π -periódica en $L^2([0, 2\pi])$ y $m_0(\xi) \in L^2([0, 2\pi])$.

b) La ortonormalidad de las $\varphi(x-k)$, implica que $|m_0(s)|^2 + |m_0(s + \pi)|^2 = 1$ en casi todo punto $s \in \mathbb{R}$.

c) Caracterización de los espacios W_0 .

Sabemos que el complemento ortogonal de V_0 se define como

$$W_0 = \{f \in V_{-1} : \langle f, g \rangle = 0, \text{ para todo } g \in V_0\}$$

Si $f \in V_{-1}$, entonces $f = \sum_n f_n \varphi_{-1,n}$, donde $f_n = \langle f, \varphi_{-1,n} \rangle$. Esto implica que

$$\widehat{f}(\xi) = 2^{-1/2} \sum_n f_n e^{-in\xi/2} \widehat{\varphi}(\frac{\xi}{2}) = m_f(\frac{\xi}{2}) \widehat{\varphi}(\frac{\xi}{2})$$

donde $m_f(\xi) = 2^{-1/2} \sum_n f_n e^{-in\xi}$.

Además, m_f es una función 2π -periódica en $L^2([0, 2\pi])$ y $m_f \in L^2([0, 2\pi])$.

Si $f \perp V_0$ entonces $f \perp \varphi_{0,n}$, para todo $k \in \mathbb{Z}$, esto es,

$$\langle f, \varphi_{0,n} \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x) \overline{\varphi_{0,k}}(x) dx = 0$$

para todo $k \in \mathbb{Z}$.

Pero como

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) \overline{\varphi_{0,k}}(x) dx = \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\xi) \overline{\widehat{\varphi}(\xi)} e^{-i\xi k} d\xi = \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\xi) \overline{\widehat{\varphi}(\xi)} e^{i\xi k} d\xi$$

entonces,

$$\int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\xi) \overline{\widehat{\varphi}(\xi)} e^{i\xi k} d\xi = 0$$

Discretizando la ecuación anterior tenemos

$$\int_0^{2\pi} \sum_{i \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(\xi + 2\pi l) \overline{\widehat{\varphi}(\xi + 2\pi)} e^{i(\xi + 2\pi l)k} d\xi = 0$$

es decir,

$$\int_0^{2\pi} \sum_{i \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(\xi + 2\pi l) \overline{\widehat{\varphi}(\xi + 2\pi)} e^{i\xi k} d\xi = 0$$

Por lo tanto,

$$\sum_{i \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(\xi + 2\pi l) \overline{\widehat{\varphi}(\xi + 2\pi)} = 0 \quad (2.3.23)$$

debido a que la base $\{e^{i\xi k}\}_{k \in \mathbb{Z}}$ es densa en $L^2([0, 2])$. Además la serie en (2.3.23) converge absolutamente en $L^1([-\pi, \pi])$. Así mismo se tiene,

$$\widehat{f}(\xi) = \lambda\left(\frac{\xi}{2}\right) \overline{m_0\left(\frac{\xi}{2} + \pi\right)} \widehat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2}\right)$$

es decir,

$$\widehat{f}(\xi) = e^{i\xi/2} u(\xi) \overline{m_0\left(\frac{\xi}{2} + \pi\right)} \widehat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2}\right) \quad (2.3.24)$$

donde u es una función 2π -periódica.

d) La forma general de (2.3.24), para la transformada de Fourier de $f \in W_0$, sugiere que consideremos,

$$\psi(\xi) = e^{i\xi/2} \overline{m_0\left(\frac{\xi}{2} + \pi\right)} \widehat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2}\right) \quad (2.3.25)$$

Así, la ecuación anterior puede ser expresada de la siguiente manera

$$\widehat{f}(\xi) = \left(\sum_k u_k e^{-i\xi k} \right) \widehat{\varphi}(\xi) \quad \text{o} \quad f(x) = \sum_k u_k \psi(x - k)$$

tal que las wavelets $\psi(x - k)$ forman una base de W_0 .

2.3.3. Wavelets biortogonales

El análisis multirresolución abordado para el tratamiento de las imágenes, tiene su fundamentación teórica en los trabajos desarrollados en [1], [15], [40], [53]. De la familia de polinomios spline-B que ellos presentan, se escoge el caso particular de los polinomios splines cúbicos biortogonales. Por medio

del análisis multirresolución son obtenidos los coeficientes wavelets y los respectivos coeficientes wavelets duales de la imagen. Estos coeficientes, permiten reconstruir la función energía de la señal o imagen en estudio. Los splines biortogonales actúan como filtros cortos que mejoran la carga computacional y son más estables, [8].

Función Spline

Una función spline está formada por varios polinomios, cada uno definido sobre un subintervalo, que se unen entre sí obedeciendo a ciertas condiciones de continuidad. Por lo tanto, la principal ventaja es su diferenciabilidad de cualquier orden en un dominio. El nombre Spline proviene del inglés, significa regleta larga y flexible. Estas regletas eran usadas por artesanos para crear curvas, que describían superficies a construir, como cascos de barcos y fuselajes de aviones. Constreñidos por pesos, estas regletas elásticas o splines asumen una forma que minimizan su energía elástica, propiedad que heredan los splines matemáticos de grado tres.

Entre los diferentes spline, la función spline cúbica es la más común y se define de la siguiente manera:

$$y = S(x) = A_k(x - x_k) + B_k(x - x_k)^2 + C_k(x - x_k)^3 + D_k$$

Donde las constantes A_k , B_k , C_k , D_k , son los coeficientes spline en los datos de los puntos k .

Es decir, dada una función f definida en $[a, b]$, y un conjunto de nodos $x_1 < x_2 < \dots < x_n$ una función spline cúbica $S(x)$ para f es una función que satisface las siguientes condiciones:

1. Los intervalos son llamados nudos. Los nudos pueden ser idénticos a los puntos indicados por el eje x .
2. Entre los nudos k , $S(x)$ cumple con la continuidad restringida de la función y sus segundas derivadas.
3. $S(x)$ es una función cúbica en cada subrango $[x_k, x_{k+1}]$ para $k = 1, \dots, n - 1$

4. Fuera del rango de x_1 a x_k , $S(x)$ es una línea recta.

Para un intervalo fijo, entre los datos de puntos x_k y x_{k-1} , son válidas las siguientes relaciones para los valores de la señal y sus derivadas:

$$\begin{aligned} y_k &= D_k \\ y_{k+1} &= A_k(x - x_k)^3 + B_k(x - x_k)^2 + C_k(x - x_k) \\ y'_k &= S'(x_k) = C_k \\ y'_{k+1} &= 3A_k(x - x_k)^2 + 2B_k(x - x_k) + C_k \\ y''_k &= S''(x_k) = 2B_k \\ y''_{k+1} &= 6A_k(x - x_k) + 2B_k \end{aligned}$$

Los coeficientes spline pueden determinarse por un método que, al mismo tiempo, también suaviza los datos a estudiar. Los valores de las ordenadas \hat{y}_k son calculadas de tal forma que las diferencias de los valores observados son saltos positivos proporcionales r_k en su tercera derivada, en el punto x_k :

$$r_k = S'''(x_k) - S'''(x_{k+1}) \quad (2.3.26)$$

$$r_k = p_k(y_k - \hat{y}_k) \quad (2.3.27)$$

Los factores de proporcionalidad p_k son obtenidos por validación cruzada. Las funciones spline pueden aplicarse para aproximar y suavizar todo tipo de curvas.

2.3.4. Los B-Splines

Son un sistema de funciones spline a partir de las cuales se obtienen, mediante combinaciones lineales, todas las demás funciones spline. Es decir, dichos polinomios spline constituyen bases para ciertos espacios de splines. La utilización de B-splines tiene muchas ventajas con respecto a otros tipos de aproximaciones. La más importante de las ventajas tiene que ver con la facilidad de procesamiento computacional. Algunas características de los B-splines son: funciones simétricas, funciones en forma de campana y los B-splines forman una base de splines.

Splines de Schoenberg

Son B-Splines centrados, simétricos, de soporte compacto. En [65], se define la función B-Spline central de orden n , así:

$$\beta^n(t) = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} (-1)^k \left(t - k + \frac{n+1}{2}\right)^n \mu\left(t - k + \frac{n+1}{2}\right). \quad (2.3.28)$$

Este resultado es verdadero, en efecto:

Por definición [65], $\beta^n(t)$ se construye por convoluciones sucesivas:

$$\beta^n(t) = \underbrace{\beta^0(t) * \dots * \beta^0(t)}_{(n+1) \text{ veces}}$$

$$\text{donde } \beta^0(t) = \begin{cases} 1, & \text{si } t \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$t \in \mathbb{R}$, μ es la función escalón unitario y n es el orden de los polinomios. Calculando la transformada de Fourier:

$$\widehat{\beta^0(t)} = \int_{-\infty}^{\infty} \beta^0(t) e^{-iwt} dt = \frac{e^{\frac{iw}{2}} - e^{-\frac{iw}{2}}}{iw}$$

aplicando $\beta^n(t) = \underbrace{\beta^0(t) * \dots * \beta^0(t)}_{(n+1) \text{ veces}}$ en el dominio de la frecuencia se

obtiene.

$$B^n(w) = \underbrace{B^0(w) * \dots * B^0(w)}_{(n+1) \text{ veces}} = [B^0(w)]^{n+1}$$

y como $B^0(w) = \frac{e^{\frac{iw}{2}} - e^{-\frac{iw}{2}}}{iw}$ reemplazando

$$B^n(w) = \left[\frac{e^{\frac{iw}{2}} - e^{-\frac{iw}{2}}}{iw} \right]^{n+1}$$

Se tiene que $\beta_+^0(t)$ es la B-Spline de grado cero para $t \geq 0$. Derivando sucesivamente se obtiene: $D^{n+1}(\beta_+^n(t)) = n! \delta(t)$, pasando al dominio de la frecuencia y aplicando transformada de Fourier $(iw)^{n+1}(B_+^n(w)) = n!$.

Haciendo $B_+^0(w) = X_+^0(w)$:

$$B_+^n(w) = \left[\frac{e^{\frac{iw}{2}} - e^{-\frac{iw}{2}}}{iw} \right]^{n+1} \cdot \frac{[iw]^{n+1} X_+^n(w)}{[iw]^{n+1} X_+^n(w)} = \left[e^{\frac{iw}{2}} - e^{-\frac{iw}{2}} \right]^{n+1} \cdot \frac{[iw]^{n+1} X_+^n(w)}{n!}$$

$$B_+^n(w) = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} (-1)^k e^{-iw[k - \frac{n+1}{2}]} X_+^n(w)$$

Regresando al dominio del tiempo

$$\beta^n(t) = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} (-1)^k (t - k + \frac{n+1}{2})_+^n.$$

y considerando la función escalón unitario trasladada $k - \frac{n+1}{2}$:

$$\beta^n(t) = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} (-1)^k (t - k + \frac{n+1}{2})^n \mu(t - k + \frac{n+1}{2}).$$

Esta forma de construir recursivamente cada B-Spline de orden n puede hacerse a partir de la B-Spline desplazada de orden $n - 1$.

$$\beta^n(t) = \frac{(\frac{t+1}{2} + t)\beta^{n-1}(t + \frac{1}{2}) + (\frac{n+1}{2} - t)\beta^{n-1}(t - \frac{1}{2})}{2}$$

Derivando recursivamente:

$$\frac{d\beta^n(t)}{dt} = \beta^{n-1}(t + \frac{1}{2}) - \beta^{n-1}(t - \frac{1}{2}).$$

La segunda derivada:

$$\frac{d^2\beta^n(t)}{dt^2} = \beta^{n-2}(t + 1) - 2\beta^{n-2}(t) + \beta^{n-2}(t - 1).$$

Aplicando la propiedad de integración recursiva a

$$\beta^n(t) = \frac{(\frac{t+1}{2} + t)\beta^{n-1}(t + \frac{1}{2}) + (\frac{n+1}{2} - t)\beta^{n-1}(t - \frac{1}{2})}{2}.$$

$$\int_{-\infty}^x \beta^n(t) dt = \int_{-\infty}^x \frac{(\frac{t+1}{2} + t)\beta^{n-1}(t + \frac{1}{2}) + (\frac{n+1}{2} - t)\beta^{n-1}(t - \frac{1}{2})}{2} dt$$

integrando por partes se llega a:

$$\int_{-\infty}^x \beta^n(t) dt = \sum_{k=0}^{n+1} \beta^{n+1}(t - \frac{1}{2} - k).$$

Por la propiedad de convolución, todas las B-Splines son positivas y el valor de su integral es 1.

La función escalada en este caso, $\phi(t)$, es la Spline cúbica $\beta^3(t) = \beta^0(t) * \beta^0(t) * \beta^0(t) * \beta^0(t)$. Cuyo cálculo conduce a:

$$\phi(t) = \beta^3(t) \begin{cases} 0 & \text{si } t < -2 \\ \frac{1}{6(2+t)^3} & \text{si } -2 \leq t \leq -1 \\ 1 + t - \frac{1}{6}t^3 - \frac{1}{3}(1+t)^3 & \text{si } -1 < t \leq 0 \\ 1 - t + \frac{1}{6}t^3 - \frac{1}{3}(1-t)^3 & \text{si } 0 < t \leq 1 \\ \frac{1}{6}(2-t)^3 & \text{si } 1 < t \leq 2 \\ 0 & \text{si } t > 2 \end{cases}$$

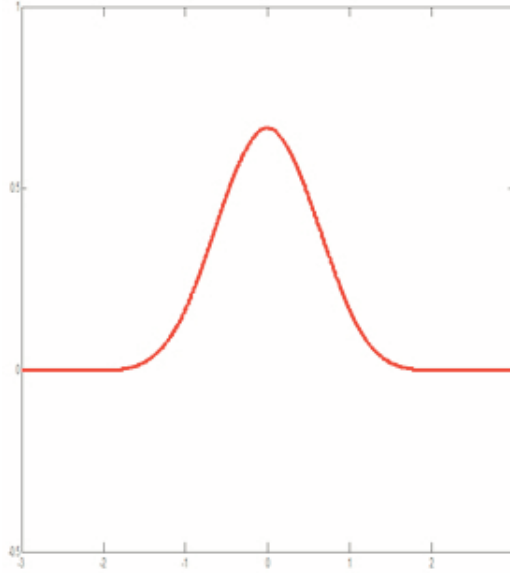


Figura 2.3: Función escalada spline cúbico

La función escalada $\phi(t)$ se diseña tomando la suma promedio de los B-splines cúbicos con el filtro identidad $\delta_0(k)$:

$\phi(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta_0(k) \beta^3(t - k)$, donde $\delta_0(k) = \begin{cases} 1, & \text{si } k = 0 \\ 0, & \text{si } k \neq 0 \end{cases}$ es el filtro identidad o de Kronecker.

B-Splines discretas

Para encontrar los coeficientes de la base de B-splines, conviene analizar las propiedades del muestreo de las B-Splines. Se consideran entonces las B-Splines discretas centradas, $b_m^n(k) := \beta^n(\frac{k}{m})$, con kernel de orden n y con factor de expansión m , obtenidas a partir del muestreo de B-splines continuos.

Así mismo, surgen las B-Splines discretas desplazadas, $c_m^n(k) := \beta^n(\frac{k}{m} + \frac{1}{2})$.

El subíndice se refiere a la cantidad de muestras entre nodos (unitaria) y el superíndice se refiere al orden de la B-Spline.

Las propiedades de las B-Splines son conocidas, ver por ejemplo [36], [65], [66]. Entre estas, se destaca la construcción recursiva. Análogo al caso continuo, se construye la de grado n a partir de la de grado $n - 1$.

$$b_m^n(k) := \frac{(\frac{k}{m} + \frac{n+1}{2})c_m^{n-1}(k) + (\frac{n+1}{2} - \frac{k}{m})c_m^{n-1}(k - m)}{n}$$

$$c_m^n(k) := \frac{(\frac{k}{m} + \frac{n+2}{2})b_m^{n-1}(k + m) + (\frac{n}{2} - \frac{k}{m})b_m^{n-1}(k)}{n}$$

El subíndice m se refiere a la cantidad de muestras entre nodos o tamaño de la etapa y el superíndice n se refiere al orden de la B-Spline.

Para la construcción recursiva de las de orden superior, a partir de la B-Spline continua, se construyen $b_m^0(k)$ y $c_m^0(k)$.

$$b_m^0(k) = \begin{cases} 1, & \text{si } k \in [-\frac{m}{2}, \frac{m}{2}] \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$c_m^0(k) = \begin{cases} 1, & \text{si } k \in [1 - m, 0] \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Cuando se da la igualdad, el muestreo hace que la función tome el valor de $\frac{1}{2}$, observación que es necesaria al implementar los algoritmos, [37].

La otra propiedad destacable es la de convolución. Para las B-splines discretas con sobremuestreo entero m mayor que 1, se tiene una expresión similar:

Para m , impar:

$$b_m^n(k) = \frac{1}{m^2} \underbrace{(b_m^0(k) * \dots * b_m^0(k))}_{(n+1) \text{ veces}} * b_1^n(k).$$

Para m par y n impar:

$$b_m^n(k) = \frac{1}{m^n} \delta_{\frac{n+1}{2}} * \underbrace{(b_m^0(k) * \dots * b_m^0(k))}_{(n+1) \text{ veces}} * b_1^n(k).$$

Para m par y n par:

$$b_m^n(k) = \frac{1}{m^n} \delta_{\frac{n+1}{2}} * \underbrace{(b_m^0(k) * \dots * b_m^0(k))}_{(n+1) \text{ veces}} * c_1^n(k).$$

Considérese, ahora, el espacio V_j , formado por las funciones spline, donde cada polinomio definido sobre el intervalo $[k2^j; (k+1)2^j]$, con $k \in \mathbb{Z}$, es de grado tres.

$$V_j = \left\{ s(t) : s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_j(k) \phi(2^{-j}t - k), t \in \mathbb{R}, c_j \in l_2 \right\}, l_2 \text{ es el espacio}$$

de las sucesiones cuadrado sumables $c(k)$, $k \in \mathbb{Z}$. V_j es el conjunto de funciones spline cuadrado integrables de una dimensión, es decir, pertenecen a $L_2(\mathbb{R})$. Estas funciones son continuas de clase C^2

Esta sucesión de espacios anidados V_j y la función escalada $\phi(t) = \beta^3(t)$ definen un análisis multirresolución. La relación de escala viene dada por, [37]:

$$\beta^3\left(\frac{t}{2}\right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mu_2^3(k) \beta^3(t - k)$$

El filtro binomial Kernel $\mu_2^3(k)$, es un filtro conocido como de impulso de respuesta finita o FIR, definido como:

$$\mu_2^3(k) = \begin{cases} 0 & \text{si } k < -2 \\ \frac{1}{8} & \text{si } k = -2 \\ \frac{1}{2} & \text{si } k = -1 \\ \frac{3}{4} & \text{si } k = 0 \\ \frac{1}{2} & \text{si } k = 1 \\ \frac{1}{8} & \text{si } k = 2 \\ 0 & \text{si } k \geq 2 \end{cases}$$

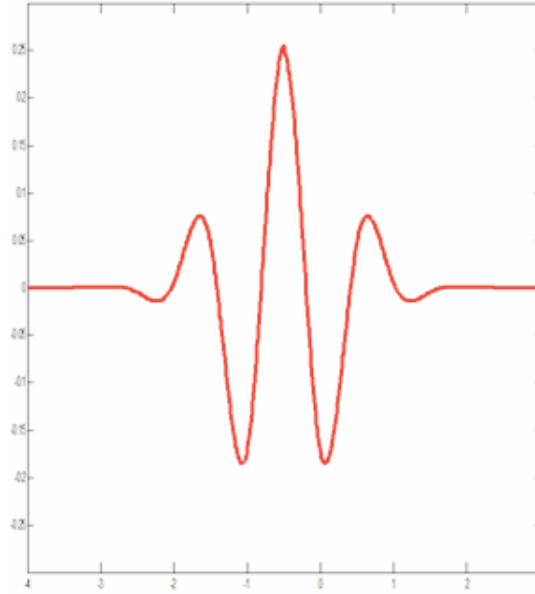


Figura 2.4: Función wavelet spline cúbico

La Wavelet Spline $\psi(\frac{t}{2})$ se construye al tomar la suma promedio de las B-Splines cúbicas con una sucesión $w(k)$:

$$\psi(\frac{t}{2}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} w(k) \beta^3(t - k)$$

$\psi(\frac{t}{2})$ es ortogonal al conjunto de B-Splines expandidas $\{\beta^3(\frac{t}{2} - k)\}$.

Para conseguir una fórmula explícita para la wavelet B-spline de orden tres, se toma:

$$\beta^3\left(\frac{t}{2}\right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mu_2^3(k) \beta^3(t-k)$$

junto con la propiedad $\langle \beta^3(t), \beta^3(t-y) \rangle = \beta^7(y)$, consecuencia de la propiedad ya dada de convolución sucesiva $\beta^n(t) = \underbrace{\beta^0(t) * \dots * \beta^0(t)}_{(n+1) \text{ veces}}$, la

restricción de ortogonalidad expresada como una ecuación de convolución $\langle \psi(\frac{t}{2}), \beta^3(\frac{t}{2} - k) \rangle = [w * \mu_2^3(k) * b^7] \downarrow 2(k) = 0, k \in \mathbb{Z}$, y la transformada Z de la anterior expresión:

$$\frac{1}{2}(W(z)U_2^3(z)B_1^7(z) + W(-z)U_2^3(-z)B_1^7(-z)) = 0$$

y, finalmente aplicando la transformada Z inversa, se tiene la explícita Wavelet B-Spline cúbica:

$$\psi\left(\frac{t}{2}\right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (\mu_2^3 * \underline{b}^7 * \delta_{-1})(k) \beta^3(t-k)$$

Cambiando t por $2t$ se obtiene la wavelet biortogonal spline

$$\psi(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (\mu_2^3 * \underline{b}^7 * \delta_{-1})(k) \beta^3(2t-k) \quad (2.3.29)$$

Desarrollando las operaciones respectivas, se tiene explícitamente la Wavelet de medida nula, oscilante, de energía finita, bien localizada en un intervalo finito y con desvanecimiento en el tiempo, [37].

A continuación se presentan las gráficas de las funciones escalada dual y B-spline dual.

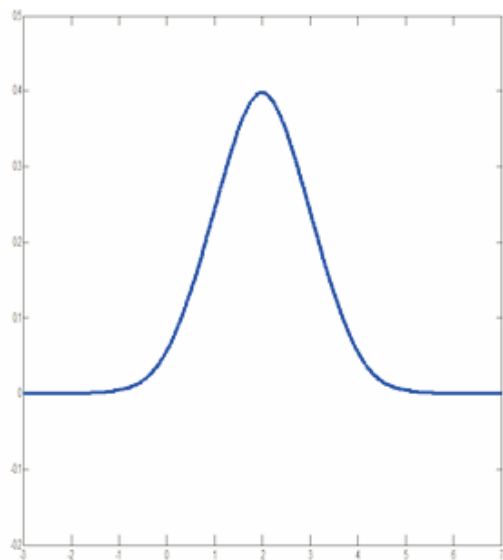


Figura 2.5: Función escalada dual spline cúbico

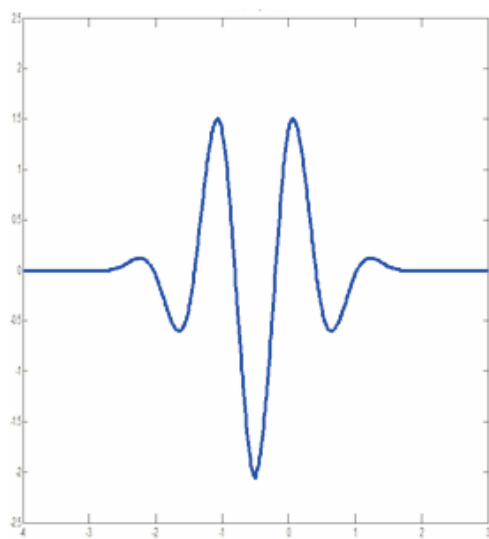


Figura 2.6: Función B-spline cúbico dual

CAPÍTULO 3

Wavelet y Tomografía Local

Este capítulo inicia presentando la tomografía computarizada (TC) como un problema inverso, el cual consiste en encontrar una función (entrada) a partir de ciertos valores (salidas) conocidos. En el caso de la tomografía, los valores conocidos son los valores de las atenuaciones de los rayos X. Se utilizan wavelets biortogonales para la recuperación de la función, obteniéndose mejores resultados que cuando utilizamos la transformada de Fourier.

Se presentan las funciones escaladas y waveletes con sus respectivas funciones duales y filtros, y se enuncian las fórmulas de reconstrucción.

3.1. La tomografía computarizada

Sean X e Y espacios normados y $A : U \rightarrow V$ un operador tal que $A\phi = f$, con $\phi \in X$ e $f \in Y$. El problema directo consiste en calcular la respuesta f ante una entrada ϕ , mientras que en un problema inverso debe determinarse la entrada ϕ que produce una cierta respuesta f .

En los problemas inversos el objetivo es estimar algunos atributos desconocidos que son de interés, a partir de mediciones que se relacionan indirectamente a dichos atributos. Tal es el caso de la tomografía, donde a partir de las mediciones de las atenuaciones de los rayos X que atraviesan un objeto se debe recuperar la imagen del objeto.

En una Tomografía Computarizada (*TC*), se hace pasar un número finito de rayos X a través de un plano del objeto desde varios ángulos. La intensidad de cada rayo es medida antes y después de atravesar el objeto. Veamos como construir el mapa de intensidades del objeto a partir de las medidas de las atenuaciones de los rayos [22], [23], [45].

Sea s una variable que mide la distancia desde la fuente a lo largo de un rayo, asumimos que la intensidad del rayo cambia cuando éste pasa a través del objeto y que el rayo viaja en el plano xy . La intensidad I cambia con respecto a la distancia s de acuerdo con la ecuación,

$$\frac{dI}{ds} = -\mu(x, y)I \quad (3.1.1)$$

donde $\mu(x, y)$ es la densidad del objeto. Como la intensidad y la densidad no son negativas, el signo menos en la ecuación anterior muestra que si se cambia la intensidad, ésta decrece cuando la distancia s aumenta.

Para relacionar la intensidad inicial transmitida con la densidad, separamos variables e integramos entre la intensidad inicial (I_0) y la intensidad final (I_T).

$$\frac{dI}{I} = -\mu(x, y)ds \quad (3.1.2)$$

$$\int_{I_0}^{I_T} \frac{dI}{I} = \ln \left(\frac{I_T}{I_0} \right) = -\ln \left(\frac{I_0}{I_T} \right) \quad (3.1.3)$$

Para integrar el lado derecho la ecuación (3.1.1), debemos integrar una función de x e y con respecto a la variable s , lo cual no es inconsistente dado que la distancia s a lo largo del rayo es ella misma una función de x e y . Si el origen del rayo está en el punto (x_0, y_0) , y consideremos cualquier punto del rayo con coordenadas (x, y) , entonces, la distancia entre estos dos puntos está dada por, $s - s_0 = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$, donde s_0 es la distancia entre el origen y el punto (x_0, y_0)

Esto nos lleva a integrar el lado derecho de la ecuación (3.1.1) usando una integral de línea. Recordemos que la mejor manera para resolver una integral de línea es parametrizar la curva con respecto a la longitud de arco. Si σ

denota la línea en el plano xy seguida por el rayo, la integral la podemos escribir como:

$$\int_{\sigma} \mu(x, y) ds \quad (3.1.4)$$

luego,

$$-\ln \left(\frac{I_0}{I_T} \right) = \int_{\sigma} \mu(x, y) ds \quad (3.1.5)$$

$$\frac{I_0}{I_T} = e^{-\int_{\sigma} \mu(x, y) ds} \quad (3.1.6)$$

que relaciona la intensidad inicial transmitida con la cantidad de materia (densidad) por la cual atraviesa el rayo.

Dada la naturaleza del problema de la tomografía, como se dijo anteriormente, en éste no se cuenta con la imagen sino con el conjunto de las proyecciones o más específicamente con la transformada de Radon (sinograma).

3.1.1. La tomografía local

El problema de la tomografía local puede ser enunciado como sigue: Dado $a > 0$ podemos calcular el valor de la función $f(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, para toda x tal que $|x| \leq a$, conociendo las proyecciones de f de las rectas que pasan por la bola de radio a y centro en el origen. En otras palabras, el problema de la tomografía local es la recuperación de la función $f(x)\chi_{\{|x| \leq a\}}(x)$ a partir de las proyecciones $\mathfrak{R}_{\theta}f(s)\chi_{[-a, a]}(s)$, donde $\chi_s(t)$ es la función característica y $\mathfrak{R}_{\theta}f(s)$ es la transformada de Radon de f .

El problema de **tomografía local** también se llama *problema interior*, o tomografía en una región de interés (ROI) (por sus siglas en inglés). El problema de la tomografía local no tiene solución única cuando n es par. Esto está demostrado en [45] con la construcción de una función $u(x)$, $x \in \mathbb{R}^2$, con $\text{sop}(x) \subseteq \{x : |x| \leq 1\}$ tal que para algún $0 < a < 1$, $u\chi_{\{|x| \leq a\}} \neq 0$ pero $\mathfrak{R}_{\theta}u\chi_{[-a, a]} \equiv 0$. Una interpretación de esta no-unicidad en términos de desvanecimiento de valores singulares puede ser encontrado en [38], donde la descomposición de valores singulares del interior de la transformada de Radon es dado.

En la mayoría de las aplicaciones prácticas, las proyecciones de f sobre rectas que pasan por una región un poco más grande que la región de interés se conocen. En este caso, el problema puede enunciarse como sigue: dado $0 < a < a'$, calcular los valores de una función $f(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, para todo x tal que $|x| < a$, conociendo las proyecciones de f sobre las rectas que pasan por la bola de radio a' alrededor del origen. Este problema de *tomografía semi-local* no tiene solución única cuando n es par y como antes, existen funciones $u(x)$, $x \in \mathbb{R}^2$ con $\Re_\theta u \chi_{[-a', a']} = 0$ para todo $\theta \in S^1$, pero para los que $u \chi_{\{|x| \leq a'\}} \neq 0$. Sin embargo, se ha demostrado en [45] que tales funciones no varían mucho en $\{x : |x| \leq a\}$ si a es pequeño con relación a a' .

3.1.2. Las imágenes digitales

Una imagen digital en escala de grises es una función $f(x, y)$, donde x e y representa las coordenadas y el valor $f(x, y)$ corresponde a la intensidad de la luz en el punto considerado. Este valor es proporcional a la transmitancia o reflectividad de la luz (intensidad de luz o nivel de gris), del punto considerado (x, y) .

Al proceso de obtención de imágenes digitales se le denomina digitalización y consiste en la descomposición de la imagen real en una matriz discreta de puntos de un determinado tamaño, donde cada uno tiene un valor proporcional a su nivel de color. Por tanto puede decirse que una imagen digital se puede asimilar a una matriz de n filas y m columnas. A cada celda de la matriz se le denomina pixel (picture x element) y esta representa una superficie que es función de su tamaño $(\Delta x, \Delta y)$. A cada pixel le corresponde uno o más valores digitales (número digital o valor digital)

Podemos decir que una imagen $f(x, y)$ está formada por dos componentes: una es la cantidad de luz incidente en la escena y la otra es la cantidad de luz reflejada por los objetos. Estas dos componentes se llaman: iluminación, denotada por $i(x, y)$ y reflectancia, denotada por $r(x, y)$. Entonces

$$f(x, y) = i(x, y)r(x, y) \tag{3.1.7}$$

Una imagen $f(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ de acuerdo a [3], puede ser expresada por medio de la transformada wavelet de la siguiente forma:

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{j,k} \sum_{i=1}^3 \langle f, \Psi_{j,k}^i \rangle \mathring{\Psi}_{j,k}^i = \sum_{j,k} \sum_{i=1}^3 \langle f, \mathring{\Psi}_{j,k}^i \rangle \Psi_{j,k}^i \quad (3.1.8)$$

o como

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^2} \langle f, \Phi_{j,k} \rangle \mathring{\Phi}_{j,k} + \sum_{j=-\infty}^J \sum_{k \in \mathbb{Z}^2} \sum_{i=1}^3 \langle f, \Psi_{j,k}^i \rangle \mathring{\Psi}_{j,k}^i$$

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^2} \langle f, \mathring{\Phi}_{j,k} \rangle \Phi_{j,k} + \sum_{j=-\infty}^j \sum_{k \in \mathbb{Z}^2} \sum_{i=1}^3 \langle f, \mathring{\Psi}_{j,k}^i \rangle \Psi_{j,k}^i \quad (3.1.9)$$

Donde

$$\Phi_{j,k}(\mathbf{x}) = \varphi_{j,k_1}(x_1) \varphi_{j,k_2}(x_2) \quad (3.1.10)$$

$$\Psi_{j,k}^1(\mathbf{x}) = \varphi_{j,k_1}(x_1) \psi_{j,k_2}(x_2) \quad (3.1.11)$$

$$\Psi_{j,k}^2(\mathbf{x}) = \psi_{j,k_1}(x_1) \varphi_{j,k_2}(x_2) \quad (3.1.12)$$

$$\Psi_{j,k}^3(\mathbf{x}) = \psi_{j,k_1}(x_1) \psi_{j,k_2}(x_2) \quad (3.1.13)$$

y

$$\mathring{\Phi}_{j,k}(\mathbf{x}) = \mathring{\varphi}_{j,k_1}(x_1) \mathring{\varphi}_{j,k_2}(x_2) \quad (3.1.14)$$

$$\mathring{\Psi}_{j,k}^1(\mathbf{x}) = \mathring{\varphi}_{j,k_1}(x_1) \mathring{\psi}_{j,k_2}(x_2) \quad (3.1.15)$$

$$\mathring{\Psi}_{j,k}^2(\mathbf{x}) = \mathring{\psi}_{j,k_1}(x_1) \mathring{\varphi}_{j,k_2}(x_2) \quad (3.1.16)$$

$$\mathring{\Psi}_{j,k}^3(\mathbf{x}) = \mathring{\psi}_{j,k_1}(x_1) \mathring{\psi}_{j,k_2}(x_2) \quad (3.1.17)$$

Y la construcción estándar para la correspondiente wavelet separable bidimensional es la formación de las funciones:

$$\Phi(x) = \varphi(x_1)\varphi(x_2) \quad (3.1.18)$$

$$\Psi^1(x) = \varphi(x_1)\psi(x_2) \quad (3.1.19)$$

$$\Psi^2(x) = \psi(x_1)\varphi(x_2) \quad (3.1.20)$$

$$\Psi^3(x) = \psi(x_1)\psi(x_2) \quad (3.1.21)$$

y las funciones duales respectivas,

$$\mathring{\Phi}(x) = \mathring{\varphi}(x_1)\mathring{\varphi}(x_2) \quad (3.1.22)$$

$$\mathring{\Psi}^1(x) = \mathring{\varphi}(x_1)\mathring{\psi}(x_2) \quad (3.1.23)$$

$$\mathring{\Psi}^2(x) = \mathring{\psi}(x_1)\mathring{\varphi}(x_2) \quad (3.1.24)$$

$$\mathring{\Psi}^3(x) = \mathring{\psi}(x_1)\mathring{\psi}(x_2) \quad (3.1.25)$$

que corresponde a las bases wavelets separables biortogonales de las splines cúbicas φ y ψ con sus correspondientes duales $\mathring{\varphi}$ y $\mathring{\psi}$.

De acuerdo con el producto de Kroneker se puede construir bases wavelet en dos dimensiones $\phi(x, y) = \phi(x)\phi(y)$

A continuación se presentan las funciones escalada y wavelets separables que permiten hacer un AMR a cualquier función $f(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$:

La Figura 3.1 corresponde a la función φ escalada separable

$\psi^1(x, y)$ (detalles horizontales) Figura: 3.2

$\psi^2(x, y)$ (detalles verticales) Figura: 3.3

$\psi^3(x, y)$ (detalles diagonales) Figura: 3.4

y sus respectivas duales

$\mathring{\varphi}(x, y), \mathring{\psi}^1(x, y), \mathring{\psi}^2(x, y), \mathring{\psi}^3(x, y)$

La Figura 3.5 muestra las funciones de aproximación y las funciones de detalle, B-spline y spline respectivamente.

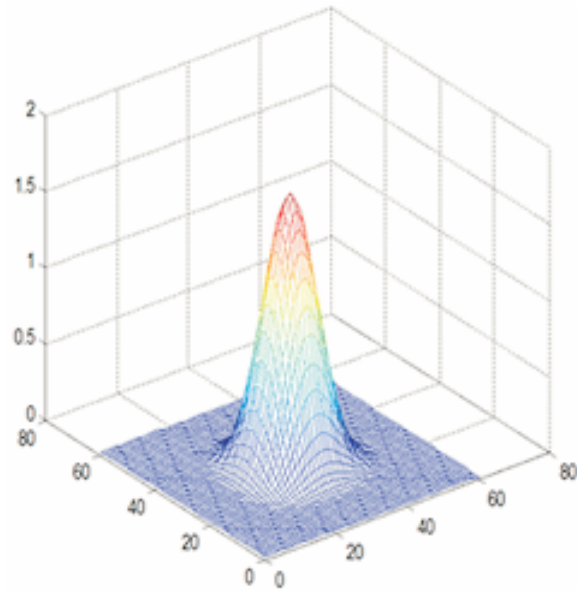


Figura 3.1: Función escalada separable

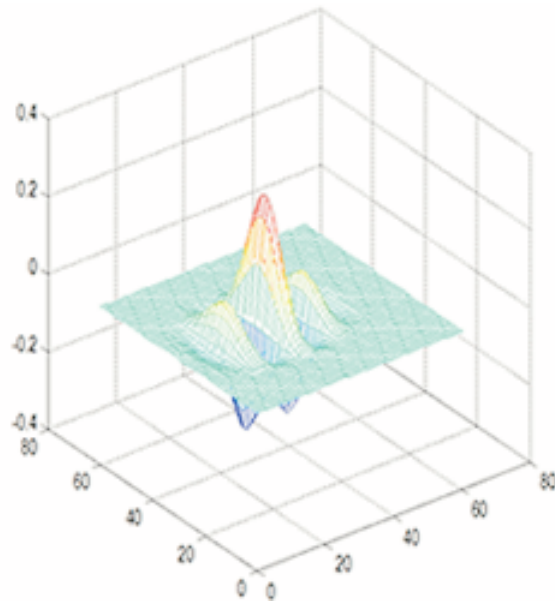


Figura 3.2: Función separable dirección horizontal

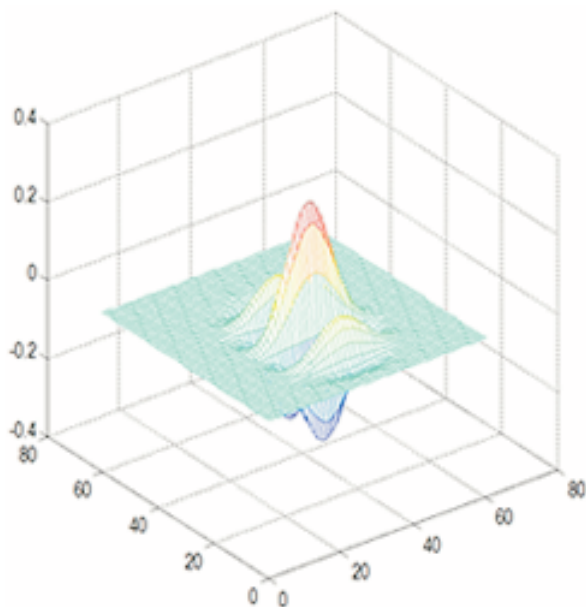


Figura 3.3: Función separable dirección vertical

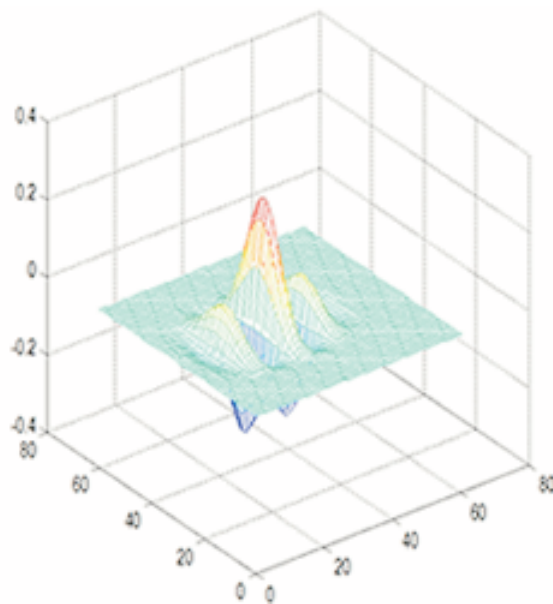


Figura 3.4: Función separable dirección diagonal

La Figura 3.6 corresponde a la descomposición de la imagen “*espina dorsal*” para los coeficientes de aproximación del nivel de resolución $j = 1$ y los coeficientes de detalles horizontales, verticales, diagonales.

3.2. Inversión de Radon utilizando wavelets

En esta sección se presentan los teoremas que permiten invertir la transformada de Radon mediante la utilización de wavelets. Se demuestra que las funciones wavelets son una herramienta fundamental para la recuperación de la función.

La ecuación (1.5.6) es la base de muchos esquemas para la reconstrucción de la transformada de Radon. Guédon y Unser [30] han utilizado este método para calcular los cuadrados de las proyecciones de $f(x)$ en espacios de funciones polinómicas suaves a trozos con nodos espaciados uniformemente.

Como se mencionó en el capítulo 1, la fórmula base para la recuperación de la función proviene del teorema Slice de Fourier.

También se cumple que si f es radial, entonces:

$$\widehat{\mathfrak{R}_\theta f}(\gamma) = \widehat{f}(|\gamma|) = 2\widehat{f}(\gamma)|\gamma|^{1-n} \quad (3.2.1)$$

de donde,

$$\widehat{f}(\gamma) = \frac{1}{2}|\gamma|^{n-1}\widehat{\mathfrak{R}_\theta f}(\gamma), \text{ así, } \widehat{f}(a\gamma) = \frac{1}{2}|a\gamma|^{n-1}\widehat{\mathfrak{R}_\theta f}(a\gamma).$$

Y por la ecuación (1.5.8) se tiene:

$$\widehat{f}(a\gamma) = \frac{1}{2}|a\gamma|^{n-1}a^{-n/2}\widehat{\mathfrak{R}_\theta f}(\gamma) \quad (3.2.2)$$

Los operadores Λ y Λ^{-1} se utilizan en la Λ -tomografía, importante técnica para el tratamiento de los problemas de la tomografía local. (ver [21], [22], [45]).

En dimensión $n = 1$ tenemos $\Lambda f = \mathcal{H}\partial f$, donde ∂f denota la derivada de f y \mathcal{H} denota la transformada de Hilbert.

Formalmente se puede derivar una fórmula de inversión para Pf mediante la combinación de la proposición 1.5.2 y la transformada inversa de Fourier.

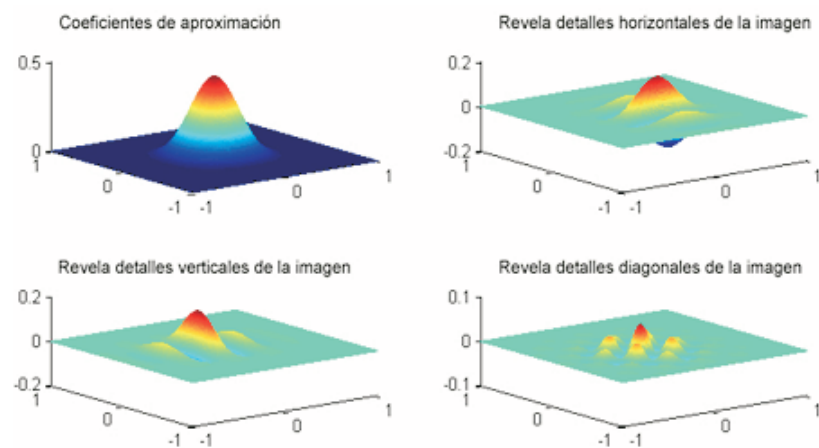


Figura 3.5: Función escalada y wavelet

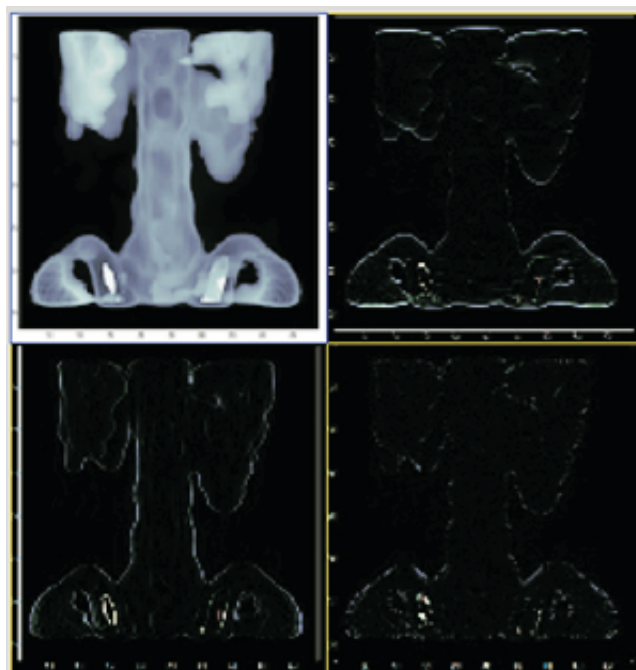


Figura 3.6: Descomposición para el nivel $j=1$

Para simplificar, considérese primero la dimensión $n = 2$. Usando el cambio a coordenadas polares y la relación $\theta = (\cos\psi, \sin\psi)$ y $\theta^\perp = (-\sin\psi, \cos\psi)$ y se obtiene:

$$\begin{aligned}
 f(x) &= (2\pi)^{-1} \int_{\mathbb{R}^2} \hat{f}(\xi) e^{i\langle x, \xi \rangle} d\xi \\
 &= (2\pi)^{-1} \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \hat{f}(\sigma\theta^\perp) e^{i\langle x, \sigma\theta^\perp \rangle} d\sigma d\varphi \\
 &= (4\pi)^{-1} \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^\infty |\sigma| \hat{f}(\sigma\theta^\perp) e^{i\langle x, \sigma\theta^\perp \rangle} d\sigma d\varphi \\
 &= \frac{1}{2} (2\pi)^{-3/2} \int_0^{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \widehat{\Lambda P_\theta f}(\sigma) e^{i\langle x, \sigma\theta^\perp \rangle} d\sigma d\varphi \\
 &= (4\pi)^{-1} \int_0^{2\pi} \Lambda P_\theta f(\langle x, \theta^\perp \rangle) d\varphi \\
 &= \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial P_\theta f(s)}{\langle x, \theta^\perp \rangle - s} ds d\varphi
 \end{aligned} \tag{3.2.3}$$

En el último paso que hizo se uso la relación $\Lambda g = \mathcal{H}\partial g$ antes mencionada.

En general, para dimensión n se usa el cambio de variables ver [35].

$$\int_{\mathbb{R}^n} g(\xi) d\xi = |S^{n-2}|^{-1} \int_{S^{n-1}} \int_{\theta^\perp} |\eta| g(\eta) d\eta d\theta \tag{3.2.4}$$

y se obtiene:

$$f(x) = (2\pi |S^{n-2}|)^{-1} \int_{S^{n-1}} \Lambda P_\theta f(E_{\Theta^\perp} x) d\theta \tag{3.2.5}$$

donde $E_{\Theta^\perp} x$ denota la proyección ortogonal de \mathbf{x} sobre el subespacio Θ^\perp .

Proposición 3.2.1. *Dada una wavelet n -dimensional separable $n > 1$, de la forma*

$$\Psi(\mathbf{x}) = \psi^1(x_1) \psi^2(x_2) \cdots \psi^n(x_n) \tag{3.2.6}$$

donde la $\psi^i(t)$ satisface $|\hat{\psi}^i(\gamma)| \leq C_i(1 + |\gamma|)^{-1}$ para todo γ , se define la familia de funciones unidimensional $\{\rho_\theta\}_{\theta \in S^{n+1}}$ por:

$$\hat{\rho}_\theta(\gamma) = \frac{1}{2} |\gamma|^{n-1} \widehat{\psi^1}(\gamma\theta_1) \widehat{\psi^2}(\gamma\theta_2) \cdots \widehat{\psi^n}(\gamma\theta_n) \tag{3.2.7}$$

donde $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n) \in S^{n-1}$. Entonces para toda $f \in L^1 \cap L^2(\mathbb{R}^n)$

$$(W_\psi f)(a, \mathbf{b}) = a^{(1-n)/2} \int_{S^{n-1}} (W_{\rho_\theta} \mathfrak{R}_\theta f)(a, b \cdot \theta) d\theta \quad (3.2.8)$$

El punto central del teorema anterior es observar que la transformada wavelet de una función $f(x)$ con cualquier wavelet madre y en cualquier escala y localización puede ser obtenida por retroproyección de la transformada wavelet de la transformada de Radon de f , usando wavelets que varían con cada ángulo, pero las cuales son admisibles para cada ángulo. La fórmula (3.2.7) se sigue inmediatamente de la fórmula de retroproyección filtrada (1.5.4) con una apropiada elección de g_θ y una determinación de cómo la dilatación conmuta con la retroproyección.

Demostración.

$$\widehat{\rho_\theta^\vee}(\gamma) = \frac{1}{2} |\gamma|^{n-1} \widehat{\mathfrak{R}_\theta \psi^\vee}(\gamma) \quad (3.2.9)$$

de manera que

$$\rho_\theta^\vee(t) = \frac{1}{2} I^{1-n} \mathfrak{R}_\theta \psi^\vee(t) \quad (3.2.10)$$

Por lo tanto,

$$(R^\# \rho_\theta^\vee)(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} R^\# I^{1-n} \mathfrak{R}_\theta \psi^\vee(\mathbf{x}) = \psi^\vee(\mathbf{x}) \quad (3.2.11)$$

Se señala a continuación que

$$\begin{aligned} \widehat{(D_a \rho_\theta^\vee)}(\gamma) &= a^{1/2} \widehat{\rho_\theta^\vee}(a\gamma) = \frac{1}{2} a^{1/2} |a\gamma|^{n-1} \widehat{\mathfrak{R}_\theta \psi^\vee}(a\gamma) \\ &= \frac{1}{2} a^{n-(1/2)} |\gamma|^{n-1} \widehat{\psi^\vee}(a\gamma\theta) = \frac{1}{2} a^{n-(1/2)} |\gamma|^{n-1} a^{-n/2} a^{n/2} \widehat{\psi^\vee}(a\gamma\theta) \\ &= \frac{1}{2} a^{(1-n)/2} |\gamma|^{n-1} (\mathfrak{R}_\theta D_a \psi^\vee)^\wedge(\gamma) \end{aligned}$$

Aquí,

$$(R^\# D_a \rho_\theta^\vee)(\mathbf{x}) = a^{(n-1)/2} \frac{1}{2} R^\# I^{1-n} \mathfrak{R}_\theta (D_a \psi^\vee)(\mathbf{x}) = a^{(n-1)/2} D_a \psi^\vee(\mathbf{x}) \quad (3.2.12)$$

y por la ecuación (1.5.7),

$$(W_\psi f)(a, \mathbf{b}) = f * D_a \psi^\vee(\mathbf{b}) = a^{(1-n)/2} (f * R^\# D_a \rho_\theta^\vee)(\mathbf{b})$$

□

Proposición 3.2.2. *Dada una wavelet unidimensional $\rho(t)$ tal que $\rho(t) = \rho(-t)$, $\rho(t) \in \mathbb{R}$ para todo t y*

$$\int_0^\infty \frac{|\hat{\rho}(r)|^2}{r^{2n-1}} dr < \infty \quad (3.2.13)$$

se define la función radial $\psi(x)$ por:

$$\hat{\psi}(\xi) = 2|\xi|^{1-n} \hat{\rho}(|\xi|) \quad (3.2.14)$$

entonces:

$$(W_\psi f)(a, \mathbf{b}) = a^{(1-n)/2} \int_{S^{n+1}} (W_\rho \Re_\theta f)(a, b \cdot \theta) d\theta \quad (3.2.15)$$

Este teorema es un caso particular del teorema 3.2.1 excepto que en el teorema 3.2.2 la wavelet unidimensional ρ se fija con anterioridad para todos los ángulos θ . Esto determina la wavelet bidimensional ψ . En el teorema 3.2.1, ψ fue fijada con anterioridad determinando $\{\rho_\theta\}_{\theta \in [0, 2\pi]}$ para cada θ . La interacción entre las wavelets uni y bidimensional en las fórmulas (3.2.11) y (3.2.13) es importante para entender como las wavelets pueden ser usadas en tomografía local y en procesamiento de imágenes. En tomografía local se busca ρ con soporte pequeño y muchos momentos de desvanecimiento. En este caso (3.2.1) ψ tendrá esencialmente el mismo radio de soporte que ρ . Por lo tanto, de la fórmula (3.2.15) los coeficientes wavelet de f pueden ser recuperados localmente desde las medidas locales de su transformada de Radon. Para los propositos del procesamiento de imágenes, uno típicamente le gustaría fijar la wavelet bidimensional ψ apropiadamente de acuerdo a la tarea deseada, y luego considerar las propiedades de ρ_θ para cada θ .

Una vez que la transformada de la función $f(x)$ se ha calculado, ahora se puede recuperar la función original $f(x)$ utilizando fórmulas estándar de inversión para la transformada wavelet continua.

Proposición 3.2.3. *Dada $\rho(t)$ wavelet unidimensional que satisface $\rho(t) = \rho(-t)$, $\rho(t) \in \mathbb{R}$ para todo t y con $\lim_{\gamma \rightarrow 0} |\gamma|^{-1} \hat{\rho}(\gamma) = \frac{1}{2}$. Se define la función radial $G(x)$ por:*

$$\hat{G}(\xi) = 2|\xi|^{-1} \hat{\rho}(|\xi|) \quad (3.2.16)$$

y sean $\psi^1(x)$, $\psi^2(x)$ como en (3.2.14) y (3.2.15). Entonces dada $f(x)$,

$$(W_{\psi^1} f)(2^j, x) = 2^{j/2} \int_0^{2\pi} \cos \theta (W_{\frac{d\rho}{dt}} \Re_{\theta} f)(2^j, x \cdot \theta) d\theta \quad (3.2.17)$$

y

$$(W_{\psi^2} f)(2^j, x) = 2^{j/2} \int_0^{2\pi} \sin \theta (W_{\frac{d\rho}{dt}} \Re_{\theta} f)(2^j, x \cdot \theta) d\theta \quad (3.2.18)$$

Proposición 3.2.4. *Sea $\rho(t)$ y $G(x)$ que cumplen las condiciones del teorema anterior, y sea $\beta \in [0, 2\pi]$. Entonces:*

$$(W_{\psi^{\beta}} f)(2^j, x) = 2^{j/2} \int_0^{2\pi} \cos(\beta - \theta) (W_{\frac{d\rho}{dt}} \Re_{\theta} f)(2^j, x \cdot \theta) d\theta \quad (3.2.19)$$

El artículo de estudio [3], propone que los coeficientes se obtienen a partir de los siguientes productos interiores:

$$\langle f, \Phi_{j,k} \rangle = 2^{-j/2} \int_0^{2\pi} (W_{\sigma_{\theta}} \Re_{\theta} f)(2^j, 2^j(k \cdot \theta)) d\theta \quad (3.2.20)$$

$$\langle f, \Psi_{j,k}^i \rangle = 2^{-j/2} \int_0^{2\pi} (W_{\rho_{\theta}^i} \Re_{\theta} f)(2^j, 2^j(k \cdot \theta)) d\theta \quad (3.2.21)$$

$$\langle f, \mathring{\Phi}_{j,k} \rangle = 2^{-j/2} \int_0^{2\pi} (W_{\sigma_{\theta}} \Re_{\theta} f)(2^j, 2^j(k \cdot \theta)) d\theta \quad (3.2.22)$$

$$\langle f, \mathring{\Psi}_{j,k}^i \rangle = 2^{-j/2} \int_0^{2\pi} (W_{\rho_{\theta}^i} \Re_{\theta} f)(2^j, 2^j(k \cdot \theta)) d\theta \quad (3.2.23)$$

Y se expresan en términos de la transformada wavelet de las proyecciones para cada ángulo, donde se definen los siguientes filtros a través del teorema 3.2.4 en términos de la transformada de Fourier

$$\widehat{\sigma}_\theta(\gamma) = \frac{1}{2} |\gamma| \widehat{\varphi}(\gamma \cos \theta) \widehat{\varphi}(\gamma \sin \theta) \quad (3.2.24)$$

$$\widehat{\sigma}_\theta^1(\gamma) = \frac{1}{2} |\gamma| \widehat{\varphi}(\gamma \cos \theta) \widehat{\psi}(\gamma \sin \theta) \quad (3.2.25)$$

$$\widehat{\sigma}_\theta^2(\gamma) = \frac{1}{2} |\gamma| \widehat{\psi}(\gamma \cos \theta) \widehat{\varphi}(\gamma \sin \theta) \quad (3.2.26)$$

$$\widehat{\sigma}_\theta^3(\gamma) = \frac{1}{2} |\gamma| \widehat{\psi}(\gamma \cos \theta) \widehat{\psi}(\gamma \sin \theta) \quad (3.2.27)$$

y los filtros duales, definidos igualmente en [46] a través de la proposición 3.2.4 en términos de la transformada de Fourier de las duales:

$$\widehat{\hat{\sigma}}_\theta(\gamma) = \frac{1}{2} |\gamma| \widehat{\hat{\varphi}}(\gamma \cos \theta) \widehat{\hat{\varphi}}(\gamma \sin \theta) \quad (3.2.28)$$

$$\widehat{\hat{\rho}}_\theta^1(\gamma) = \frac{1}{2} |\gamma| \widehat{\hat{\varphi}}(\gamma \cos \theta) \widehat{\hat{\psi}}(\gamma \sin \theta) \quad (3.2.29)$$

$$\widehat{\hat{\rho}}_\theta^2(\gamma) = \frac{1}{2} |\gamma| \widehat{\hat{\psi}}(\gamma \cos \theta) \widehat{\hat{\varphi}}(\gamma \sin \theta) \quad (3.2.30)$$

$$\widehat{\hat{\rho}}_\theta^3(\gamma) = \frac{1}{2} |\gamma| \widehat{\hat{\psi}}(\gamma \cos \theta) \widehat{\hat{\psi}}(\gamma \sin \theta) \quad (3.2.31)$$

y que mediante la transformada de Hilbert y la transformada de la derivada se obtiene ρ_θ^i : $i = 1, 2, 3$; como se muestra en las siguientes figuras.

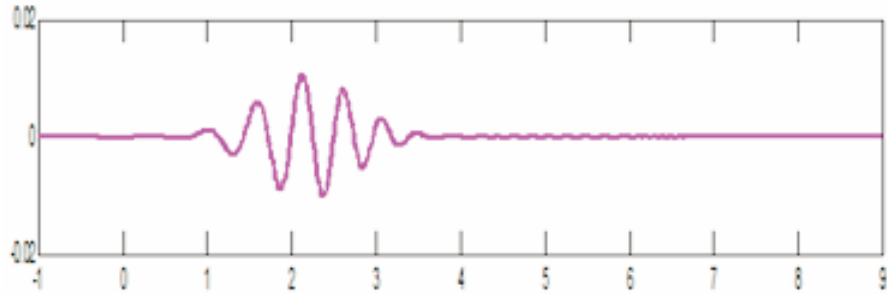


Figura 3.7: ρ^1 proyección 10 grados

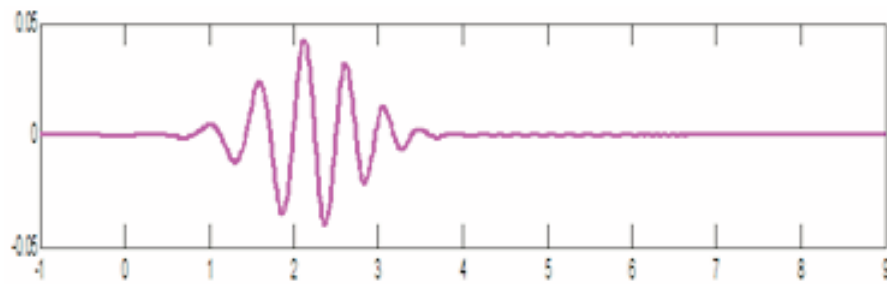


Figura 3.8: ρ^1 proyección 45 grados

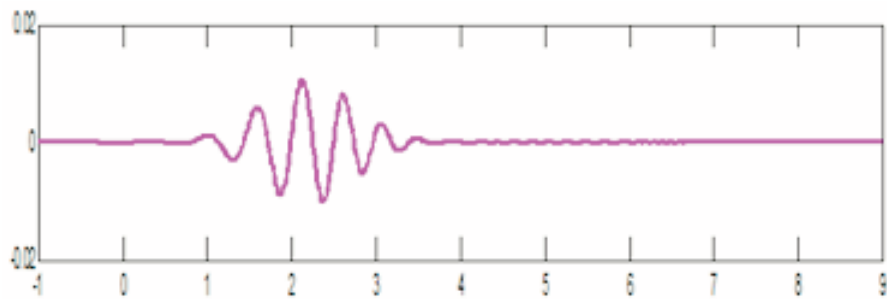


Figura 3.9: ρ^1 proyección 90 grados

CAPÍTULO 4

Implementación del algoritmo

En este capítulo se hace una breve consideración acerca del análisis del error en tomografía local, siguiendo a [53], [54]. Se describen los elementos prácticos del algoritmo para luego contrastar los resultados de las simulaciones mediante las gráficas arrojadas por el Reconstructor ITRW-BSC.

4.1. Análisis del error

Natterer en [45] indica que el error en la transformada de Radon interior no es despreciable porque la derivada de la transformada de Hilbert (la respuesta al impulso del filtro $|r|$) no es local en el espacio. Esto significa que con el fin de reconstruir incluso una pequeña región de interés se tienen que considerar algunos datos fuera de la región de interés para conseguir la reconstrucción con un error insignificante.

Se debe entonces, encontrar un límite superior para el error de reconstrucción, en términos de la cantidad de datos no locales que se consideran en la reconstrucción. Se compara la cota superior del error en una imagen local, reconstruida utilizando el algoritmo propuesto, con el límite superior del error cuando se utiliza el método estándar de Fourier.

70 Implementación del algoritmo

Se supone que para cada ángulo $\theta \in [0, \pi)$, los datos de las proyecciones $\Re_{\theta_k} f(s)$ son muestreados con un radio de intervalo de T_s , y el soporte de f es un disco de radio R centrado en el origen del Shepp-Logan phantom.

Se asume que la ROI y ROE (región de interés y región de exposición) están centrados en la imagen, como ocurre en este caso; con radios r_i, r_e pixeles centrados en el origen, estos valores son asumidos prácticamente en las expresiones 3.2.32-3.2.35.

Considerando la fórmula de retroproyección filtrada (1.5.8) y la fórmula slice de Fourier (1.5.6) donde el filtro rampa $|r|$, es reemplazado por un filtro generalmente dependiente del ángulo $h_\theta(s)$.

$$f_{rec}(x, y) = \int_0^\pi (h_\theta(s) * \Re_\theta f(s)) (x \cos \theta + y \sin \theta) d\theta \quad (4.1.1)$$

Si $h_\theta(s)$ es escogido para ser la respuesta al impulso del filtro rampa $\widehat{\Re f(r)}|r|$, la función reconstruida $f_{rec}(x, y)$ es una aproximación de la función f ; y si es la respuesta al impulso de la wavelet madre y los filtros rampa escalados, dados por las expresiones 3.2.32-3.2.35., la función reconstruida $f_{rec}(x, y)$ será la aproximación de la wavelet madre y los coeficientes escalados. La versión discreta de (4.1.1) está dada por:

$$f_{rec}(x, y) = \frac{\pi}{K} \sum_{k=1}^K \left(\frac{1}{R} \sum_{n=-R}^R P_{\theta_k}(n) h_{\theta_k}(m - n) \right) \quad (4.1.2)$$

donde $m = \left\lfloor \frac{x \cos \theta + y \sin \theta}{T_s} \right\rfloor \in \text{ROE}$, K es el número total de ángulos igualmente espaciados en los cuales las proyecciones están medidas, $P_{\theta_k}(n)$ es la proyección $\Re_{\theta_k} f(\frac{n}{T_s})$, y $\theta_k = k \frac{\pi}{K}$.

Se puede dividir la suma interna en dos partes, correspondiendo a la ROE y su complemento:

$$f_{rec}(x, y) = \frac{\pi}{K} \sum_{k=1}^K \left(\frac{1}{R} \sum_{|n| \leq r_e} P_{\theta_k}(n) h_{\theta_k}(m - n) \right) + \frac{\pi}{K} \sum_{k=1}^K \left(\frac{1}{R} \sum_{|n| > r_e} P_{\theta_k}(n) h_{\theta_k}(m - n) \right) \quad (4.1.3)$$

Es decir, la magnitud del error usando solo ROE está dado por:

$$|e(x, y)| = \left| \frac{\pi}{K} \sum_{k=1}^K \left(\frac{1}{R} \sum_{|n| > r_e} P_{\theta_k}(n) h_{\theta_k}(m - n) \right) \right| \quad (4.1.4)$$

Para obtener una cota superior para el error se utiliza la desigualdad de Cauchy-Schwartz en (4.1.4):

$$\begin{aligned} \left| \frac{\pi}{K} \sum_{k=1}^K \left(\frac{1}{R} \sum_{|n| > r_e} P_{\theta_k}(n) h_{\theta_k}(m - n) \right) \right| &\leq \frac{\pi}{K} \sum_{k=1}^K \left(\frac{1}{R} \sum_{|n| > r_e} |P_{\theta_k}(n) h_{\theta_k}(m - n)| \right) \\ &\leq \frac{\pi}{K} \sum_{k=1}^K \frac{1}{R} \left(\sum_{|n| > r_e} |P_{\theta_k}(n)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{|n| > r_e} |h_{\theta_k}(m - n)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Si se supone que el soporte de $f(x, y)$ está en el disco de radio 1, entonces $|P_{\theta_k}(n)| \leq 2 \max |f(x, y)|$, luego:

$$|e(x, y)| \leq \frac{2\sqrt{2\pi}}{K} \max |f(x, y)| \frac{\sqrt{R - r_e}}{R} \sum_{k=1}^K \left(\left(\sum_{|n| > r_e} |h_{\theta_k}(m - n)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right) \quad (4.1.5)$$

Se define el error relativo, entonces, como $|e_{rel}(x, y)| = \frac{|e(x, y)|}{\max |f(x, y)|}$, luego

$$|e_{rel}(x, y)| \leq \frac{2\sqrt{2\pi}}{K} \frac{\sqrt{R - r_e}}{R} \sum_{k=1}^K \left(\left(\sum_{|n| > r_e} |h_{\theta_k}(m - n)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right) \quad (4.1.6)$$

En el peor de los casos, la ROI es un solo punto. Así, podemos acotar (4.1.6) por:

$$|e_{rel}(x, y)| \leq \frac{2\sqrt{2\pi}}{K} \frac{\sqrt{R - r_e}}{R} \sum_{k=1}^K \left(\left(\sum_{|n| > r_e - r_1} |h_{\theta_k}(n)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right) \quad (4.1.7)$$

72 Implementación del algoritmo

Se define entonces $h_{\theta_k}^T$, el filtro truncado, como:

$$h_{\theta_k}^T(n) = \begin{cases} h_{\theta_k}(n), & |n| < r_e - r_i \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (4.1.8)$$

Por lo tanto:

$$|e_{rel}(x, y)| \leq \frac{2\sqrt{2\pi}}{K} \frac{\sqrt{R - r_e}}{R} \sum_{k=1}^K \left(\left(\sum_{n=-R}^R |h_{\theta_k}(n) - h_{\theta_k}^T(n)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right) \quad (4.1.9)$$

La suma interior puede ser escrita en el dominio de la frecuencia, así:

$$|e_{rel}(x, y)| \leq \frac{2\sqrt{2\pi}}{K} \frac{\sqrt{R - r_e}}{R} \sum_{k=1}^K \left(\left(\sum_{n=-R}^R |\hat{h}_{\theta_k}(m) - \hat{h}_{\theta_k}^T(m)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right) \quad (4.1.10)$$

Donde $\hat{h}_{\theta_k}(m)$ y $\hat{h}_{\theta_k}^T(m)$, son las transformadas de Fourier de $h_{\theta_k}(n)$ y $h_{\theta_k}^T(n)$, respectivamente.

La cota superior del error en el método estandar de retroproyección filtrada puede ser calculado reemplazando $h_{\theta_k}(m)$ en (4.1.10) por el filtro rampa $|r|$. La cota superior para el error en la reconstrucción wavelet y escalada, puede ser obtenido reemplazando \hat{h}_{θ_k} en (4.1.10) por las expresiones 3.2.32-3.2.35. En el algoritmo desarrollado los coeficientes wavelet y escalados son reconstruidos directamente de los datos de las proyecciones.

Como indica [78], para mayor comodidad, se puede suponer el cálculo del error, limitado a los errores de la reconstrucción de la imagen aproximada. La mayor parte de la energía de una imagen se compacta en la imagen aproximada, por lo que la estimación de error para esta imagen da una buena indicación del error global.

Siguiendo a [54], y considerando la escogencia de la wavelet madre biortogonal spline cúbica, se asume que los soportes esenciales de la wavelet madre y de los filtros rampa escalados, se mantienen en errores relativos menores al 0.4 % utilizando cerca de 6 pixeles fuera de la región de interés.

4.2. El algoritmo

El uso de wavelets para localizar la transformada de Radon fue propuesto primero en [70]. En [3], se indica que la inversión de la transformada de Radon no es local en dimensiones pares porque el operador Potencial de Riesz I^{1-n} no preserva el soporte compacto si n es par. Sin embargo, también indica que tendrá decaimiento rápido si f tiene momentos de desvanecimiento. Como todas las wavelets tienen al menos un momento de desvanecimiento, esto sugiere que la transformada Wavelet de f pueda ser recuperada localmente desde proyecciones locales vía cualquiera de la fórmulas:

$$\begin{aligned}
 f(\mathbf{x}) &= \sum_{j,k} \sum_{i=1}^3 \langle f, \Psi_{j,k}^i \rangle \hat{\Psi}_{j,k}^i = \sum_{j,k} \sum_{i=1}^3 \langle f, \hat{\Psi}_{j,k}^i \rangle \Psi_{j,k}^i \\
 f(\mathbf{x}) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}^2} \langle f, \Phi_{j,k} \rangle \hat{\Phi}_{j,k} + \sum_{j=-\infty}^J \sum_{k \in \mathbb{Z}^2} \sum_{i=1}^3 \langle f, \Psi_{j,k}^i \rangle \hat{\Psi}_{j,k}^i \\
 f(\mathbf{x}) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}^2} \langle f, \hat{\Phi}_{j,k} \rangle \Phi_{j,k} + \sum_{j=-\infty}^j \sum_{k \in \mathbb{Z}^2} \sum_{i=1}^3 \langle f, \hat{\Psi}_{j,k}^i \rangle \Psi_{j,k}^i \\
 f(\mathbf{x}) &= \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} 2^{-j} \int_0^{2\pi} c_{j,k}(\theta) \rho_{j,k}(x \cdot \theta) d\theta
 \end{aligned}$$

El grado de localización depende de qué tan rápidamente el potencial de Riesz de las Wavelets, decaiga. No obstante, alternativamente, en lugar de utilizar la vía del potencial de Riesz, al algoritmo propuesto se concentra en la utilización de las propiedades de las Wavelets B-spline.

El algoritmo de reconstrucción que proponen los autores en [3], basado en trabajos realizados sobre la localización de la transformada de Radon, vemos que las wavelets utilizadas son Daubechis de orden 4, 6, y 10. En este trabajo, hemos acordado en escoger la wavelet biortogonal spline cúbica con soporte compacto. Para comprobar la reconstrucción de una imagen cuya función inicial ψ es elegida como una wavelet de este tipo, entonces cada función o imagen de energía finita resulta ser una superposición de tales componentes multiplicadas por un coeficiente. Esta representación de la señal es única y conserva en los coeficientes la energía de la misma.

74 Implementación del algoritmo

La imagen original es de un tamaño de 512x512 píxeles, y los datos de los bordes locales fueron calculados usando solamente proyecciones que atravesaban la región de interés escogida. Se escoge una región de hasta 91 píxeles de diámetro localizada en el centro del Shepp-Logan Phantom, utilizando únicamente proyecciones locales. La imagen fue reconstruida usando el algoritmo de transformada Wavelet separable dada por la ecuación (3.1.9).

Se muestra la reconstrucción comparada con la reconstrucción estándar de retroproyección filtrada utilizando la Transforma Rápida de Fourier. Se implementa un algoritmo aprovechando las propiedades de las wavelets para localizar la transformada de Radon y usarla para reconstruir una región local.

El algoritmo se basa en la observación intuitiva de que para algunas bases wavelet con momentos de desvanecimiento lo suficientemente numerosos, la versión rampa-filtrada de la función de escalado, así como la función wavelet tienen decaimiento rápido. Esto explica que un alto número de momentos de desvanecimiento, puede contribuir al incremento en el decaimiento de transformada de Hilbert [12]. Es decir, dada $\psi(x)$ una wavelet diferenciable con n momentos de desvanecimiento, $\mathcal{H}\psi(x)$ está bien definida y tiene a su vez n momentos de desvanecimiento. Así mismo la suavidad de $\mathcal{H}\psi(x)$ se tiene al sacar provecho del dominio de Fourier de la transformación, y el hecho de que la suavidad de una función se relaciona con el decaimiento de su transformada de Fourier. En general, cuanto mejor sea el decaimiento de la transformada de Fourier, más suave es la función, y viceversa. Como la wavelet B-Spline cúbica es una señal de energía finita y pertenece al espacio de Sobolev $W^{2,p}(\Omega)$ para todo $p < 3 + \frac{1}{2}$, [67]; esto explica la suavidad de la wavelet y su transformada de Hilbert, que muestra el algoritmo diseñado, las cuales son ambas dos veces continuamente diferenciables.

Por tanto, la propuesta de un algoritmo cuyo reconstructor se diseña a partir de wavelets escaladas y wavelets madre tipo B-spline cúbicos, es una elección plausible puesto que ellas son wavelets con soporte compacto continuamente diferenciables. De hecho, este es el caso de la wavelet spline cúbica escogida pues es continuamente diferenciable, tiene momentos de desvanecimiento, y satisface las condiciones de decaimiento.

La importancia de este resultado es formalizar que, al exigir que $\psi(x)$ tenga un gran número de momentos de desvanecimiento, se puede efectivamente hacer que $\mathcal{H}\psi(x)$ sea tan localizada como $\psi(x)$. Hasta

ahora, esto se había observado cualitativamente con la localización de la transformada wavelet de la transformada de Radon, [19]. Teniendo en cuenta el caso especial de $\psi(x)$ Wavelet B-spline de grado $n - 1$, entonces $\mathcal{H}\psi(x)$ vuelve a ser una wavelet B-spline fraccional del mismo grado, y por lo tanto tiene el mismo decaimiento, [66].

Por lo anterior, se garantiza la predicción de la reconstrucción propuesta, ya que se sabe que $\psi(x)$ tiene n momentos de desvanecimiento. El método mostrado utiliza las propiedades de las wavelets B-spline cúbicas para localizar la transformada de Radon y poder reconstruir eficientemente una región local del Shepp Logan phantom, a partir de datos digitales.

4.3. Resultados

Se diseñó y se implementó el Reconstructor ITRW-BSC (Inversión de la Transformada de Radon utilizando Wavelets B-Spline Cúbicos), Tomografía Local basada en wavelets versión α . Es una herramienta de software desarrollada sobre Matlab® para mostrar gráficamente la recuperación de una región de interés (ROI) centrada del Shepp-Logan phantom, equivalente a localizar e invertir la transformada de Radón utilizando B-spline cúbicos.

En su estado actual, la herramienta es un apoyo didáctico y la gráfica de la interface se muestra a en la figura 4.1.

En la figura 4.2 se ilustra la región de interés, donde se puede variar la cantidad de pixeles del diámetro de la misma.

En la figura 4.3 se contrasta el resultado de la reconstrucción obtenida del algoritmo propuesto frente a la utilización del método basado en FFT se utilizan 10 proyecciones

En la figura 4.4, se utilizan 55 proyecciones, y en la 4.5 se utilizan 80 proyecciones.

Se evidencia claramente la eficiencia del algoritmo propuesto.



Figura 4.1: Interface ITRW-BSC

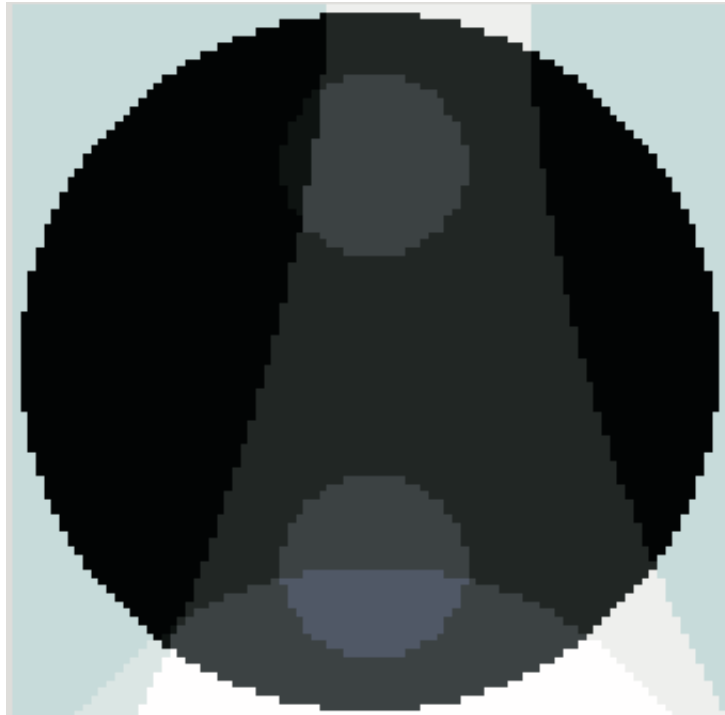
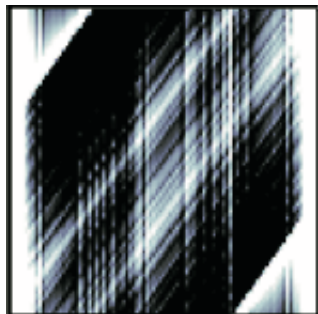


Figura 4.2: Region central del phantom

Reconstrucción usando FFT



Reconstrucción usando B-spline

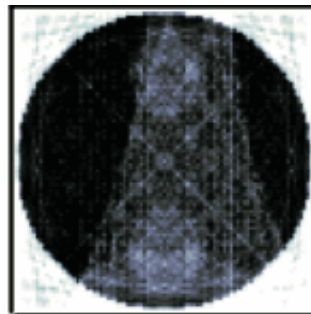


Figura 4.3: Reconstrucción utilizando 10 proyecciones

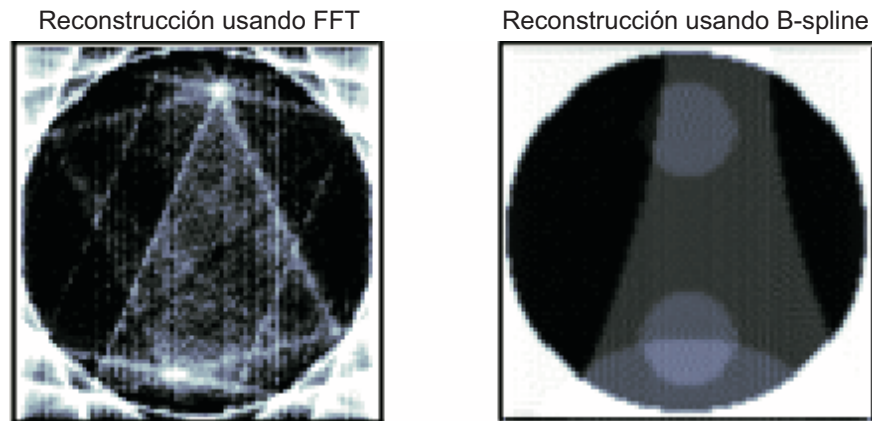


Figura 4.4: Reconstrucción utilizando 55 proyecciones

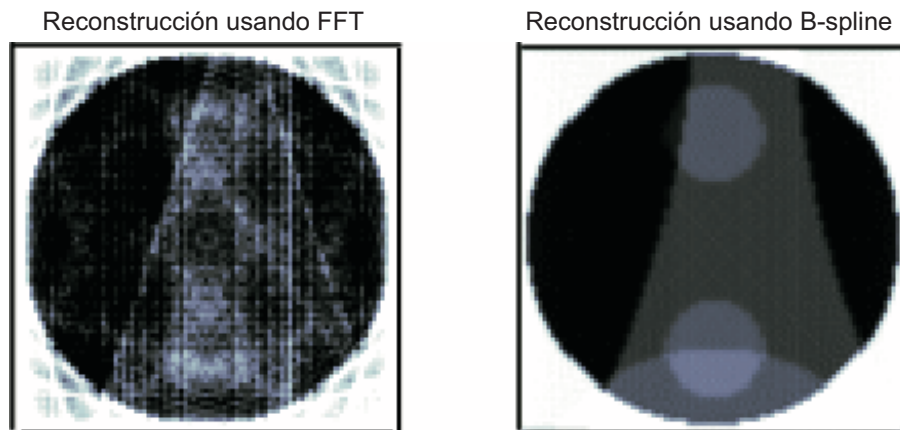


Figura 4.5: Reconstrucción utilizando 80 proyecciones

Bibliografía

- [1] Aldroubi, A. *The wavelet transform: A surfing guide*, Wpp 3-36 in Wavelets in Medicine and Biology, A. Audroubi, M. Unser (eds.), CRC Press, New York 1996.
- [2] Antonini, Marc. Barlaud, P. Mathieu, Pierre. Daubechies, I. *Image Coding Using Wavelet Transform*, IEEE.Trans. Image Proc.,1(2):205-220,1992.
- [3] Berenstein, C. Walnut D. *Wavelets and local tomography*. Wavelets in Medicine and Biology. CRC Press, 1995.
- [4] Berenstein, C. Walnut, D. *Local inversión of the Radon transform in even dimensions using Wavelets*, In S. Gindikin, and P. Michor, editors, 75 years of Radon Transform, pages 45-69.International press Co.,Ltd.,Cambridge,MA,1994.
- [5] Boggess , Albert. Narcowich, Francis J. *A First Course in Wavelets with Fourier analysis*, Prentice Hall, 2007.
- [6] Bonani, A., Durand, S. and Weiss, G. *Wavelets obtained by continuos deformations of the Haar wavelet*, Revista Mat. Iberoamericana, Vol. 12, No 1, 1996.
- [7] Boman, J. Quinto, T. *Support theorems for real-analytic Radon Transforms*. Duke J. Math., 55:943-948.

-
- [8] Brigham, E.. *The Fast Fourier Transform and its Applications*, Prentice Hall, 1988.
 - [9] Clarke, R. J. *Transform Coding of Images*, Academic Press, San Diego, CA, 1985.
 - [10] Clarke, R. J. *Digital Compression of Still Images and Video*. Academic Press, San Diego, CA, 1995.
 - [11] Cormack, A. M. *Representation of a function by its lines integrals with some radiological applications*. J. Appl. Phys. 43. 1963.
 - [12] Chaudhury, K. and Unser, M. *On the Hilbert Transform of Wavelets*, IEEE , Transactions on Signal Processing, Vol. 59, no. 4, abril 2011.
 - [13] Chui, Charles K. *An Introduction to Wavelets*, Academic Press, 1992.
 - [14] Daubechies, I. *Orthonormal bases of compactly supported wavelets*, Comm. Pure Appl. Math., 41 1988, 909-996.
 - [15] Daubechies, I. *Ten Lectures on Wavelets*, CBMS Series 61, SIAM, Philadelphia 1992.
 - [16] Daubechies, I. *The wavelet transform, time-frequency localization and signal analysis*, Theory, vol. 36 1990, 961-1005..
 - [17] Delaney, A. Bresler Y. *Multiresolution tomographic reconstruction using wavelets*, IEEE Trans.on Image Proc.,4(3),1995.
 - [18] Delyon, B. and Juditsky, A *Estimating wavelets coeficients*. pp 151-168 in Wavelets and Statistics, Springer-Verlag, Tokyo, 1995.
 - [19] Destefano, J. Olson,T. *Wavelet Localization of the Radon Transform*, IEEE Transactions on Signal Processing, 42(8): 2055-2067, 1994.
 - [20] Donoho, D. *Nonlinear Wavelet Methods for Recovery of Signals, Densities and Spectra from Indirect and Noyse Data. Difeerent Perspectives on Wavelets*. roceedings of Symposia in Pure Math., AMS., I Daubechies, Edt., 47, 173-205, 1993.
 - [21] Faridani, A. Finch, D. Ritman, E. Smith, K. *Local Tomography II*, SIAM J. Appl. Math, submitted.

-
- [22] Faridani, A. F Keinert. Natterer, F. Ritman, E. Smith, K. *Local and global tomography*. New York: In Signal Processing, IMA Vol. Math. Appl., vol.23, pp 241-255, 1990.
 - [23] Faridani, A. Ritman, E. Smith, K. *Examples of local Tomography*. SIAM J Appl. Math. 52(4): 1193-1198, 1992.
 - [24] Folland, G. B. *Real Analysis*. 2nd edition. John Wiley & Sons, Inc. New York, 1999.
 - [25] Freeman, W. Adelson, E. *The design and use of steerable filters*. IEEE Trans. On PAMI, 13(9):891-906, 1991.
 - [26] Gabor, D. *Theory of communications*. J. Inst. ElectEng. London. 93(III) 1946, 429-457.
 - [27] Gersho, A. and Gray R. M. *Vector Quantization and Signal Compression*. Kluwer Academic Publishers, Boston, 1992.
 - [28] Gonzalez, Rafael. Woods, Richard E. *Digital Image Processing*. Second Edition. MedData Interactive. Prentice Hall, 2002.
 - [29] Goswami, J. Chan, A. *Fundamentals of Wavelets Theory, Algorithms, and Applications*. John Wiley & sons, inc. 1999.
 - [30] Guédon and Unser.. *Least squares and spline filtered back-projection*. NCCR Rep. 52/92, Nat. Inst. Health, 1992.
 - [31] Helgason, Sigurdur. *The Radon Transform*. Second Edition. Boston: Birkhäuser, 1999.
 - [32] Hernández, E. Weiss, G. *A First Course on Wavelets*. CRC Press, Boca Raton, FL, 1996.
 - [33] Hong, D. Wang, J. Gardner, R. *Real Analysis with an Introduction to Wavelets and Applications*. Academic Press, 2005.
 - [34] Irino, T., Kawahara, H. *Signal reconstruction from modified auditory wavelet transform*. IEEE Trans. Signal Process., vol 41, 1993, 3549-3553.
 - [35] Keinert, F. *Inversion of K-plane transforms and applications in computer tomography*. SIAM Review, 31(1989), pp. 273-298.

- [36] Kincaid, D. and Cheney, W. *Análisis Numérico*. Edit. Addison- Wesley. E.U.A. 1994. Pags 323-363. SIAM Review, 31(1989), pp. 273-298.
- [37] López G. De Armas, R. *Algoritmo para detectar eventos epilépticos a partir de wavelets analizando la función de energía*. Tesis de Maestría en Matemáticas Aplicadas. Universidad EAFIT, Medellín, 2010.
- [38] Maass, P. *The interior Radon Transform*. SIAM J. Appl. Math., 52(3):710-724, 1992.
- [39] Mallat, S. *Multiresolution approximations and wavelet orthonormal bases for L^2* . Trans. of Amer. Math. Soc. 315, 1989, 69-87.
- [40] Mallat, S. *Wavelet Tour of signal Processing*, Third edition. Boston: American Press, 2008.
- [41] Mallat, S. *A theory for multiresolution signal decomposition: The wavelet representation*. IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell., vol. 11, 1989, 674-693.
- [42] Mallat, S. Hwang, W. *Singularity detection and processing with wavelets*, IEEE Trans. Inform. Theory (Special Issue on Wavelet Transforms and Multiresolution Signal Analysis), 38(2):617-643, 1992.
- [43] Mertins, Alfred. *Signal Analysis Wavelets, Filter Banks, Time-Frequency Transforms and Applications*, John Wiley & sons, 1996.
- [44] Meyer, Y. *Ondelettes et operateurs, I: Ondelettes*. Herman, Paris, 1990.
- [45] Natterer, F. *The Mathematics of Computerized Tomography*, Siam 2001.
- [46] Natterer, Frank. Wübbeling, Frank. *Mathematical Methods in Image Reconstruction*. Siam, 2001.
- [47] Navarro, J. Elizarraraz, D. *Introducción a la Transformada Wavelet Continua*. Ed. Reverté, 2010.
- [48] Pinsky, M. A. *Introduction to Fourier Analysis and wavelet*, Brooks/Cole, NJ, 2001.
- [49] Proakis, J. Manolakis, D. *Signal Processing: Principles, Algorithms and Applications*. Macmilan, New York, 1992.

- [50] Quak, E. and Weyrich, N. *Decomposition and reconstruction algorithms for spline wavelet on a bounded interval*, *Appl. and Comp. Harmonic Anal.* (ACHA), 1 1994, 217-231.
- [51] Ramm, A. Zaslavsky. *Singularities of the Radon transform*. Bull. AMS, 25(1):109-115,1993.
- [52] Ramm, A. Zaslavsky. *Reconstructing singularities of a function from its Radon transform*. Math. and Comput. Modelling, 18, N1, 109-138, 1993.
- [53] Rashid-Farrokhi, F. Liu, K. Berenstein, C. Walnut, D. *Localized wavelet based computarezed tomography*. Washington: Proceedings ICIP95, 1995.
- [54] Rashid-Farrokhi, F. Ray Liu, K. J. Berenstein, C. and Walnut, D. *Wavelet-Based Multiresolution Local Tomography*. IEEE. Trans. On image Process, vol. 6, no. 10, pp.1412-1429, Oct. 1997.
- [55] Reyna, J. *Lecture Notes in Mathematics*. 2004, Volume 1785/2004. Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2002.
- [56] Rioul, O. Duhamel, P. *Fast algorithms for discrete and continuous wavelet transform*. IEEE Trans. Inform. Theory, vol. IT-38 1992, 569-586.
- [57] Scheuer, T. Oldenburg, D. *Local phase velocity from complex seismic data*. Geophysics, 53(12). 1503 - 1511, 1988.
- [58] Shapiro, J. M. *Embedded image coding using zerotrees of wavelet coefficients*. IEEE Trans. Signal Proc. vol. 41- 1993, 3445-3462.
- [59] Shen, X. Galerkin, A. *wavelet method for a singular convolution equation on the real line*. J. Int. Equa. Appl. 12 2000, 157-176.
- [60] Stark, Hans-Georg. *Wavelets and Signal Processing An Application-Based Introduction*. Springer, 2005.
- [61] Strang, G. and Nguyen, T. *Wavelets and Filter Banks*. Wellesley-Cambridge Press, Cambridge, MA, 1996.

- [62] Sun, W. Zhou, X. *Sampling theorem for wavelet subspaces: error estimate and irregular sampling*. IEEE Trans. Signal Process. vol. 48 2000, 223-226.
- [63] Tang, Y. Yang, L. Ma, H. *Wavelet Theory and Its Application to Pattern Recognition*. World Scientific, 2000.
- [64] Tao, Qian. Mang, Vai. Yuesheng, Xu. *Wavelet Analysis and Applications*. Berlin: Birkhäuser Verlag Basel, 2000.
- [65] Unser, M. Aldroubi, A. and Murray, E *A family of polynomial spline wavelet transforms*. Signal Processing 30(1993) 141-162.
- [66] Unser, M. and Aldroubi, A. *B-spline processing I: Theory and II: Efficient design and application*. IEEE Trans. Signal Process., vol 41 1993, 821-848.
- [67] Unser, M. *A practical guide to implementation of the wavelet transform*, pp 37-76 in *Wavelets in Medicine and Biology*. CRC Press, New York 1996.
- [68] Walnut, D. *An Introduction to Wavelet Analysis*. Birkhäuser, 2002.
- [69] Walnut, D. *Local inversion of the Radon Transform in the plane using wavelets*. San Diego: in proceedings of SPIE's. International Symposium on Optics, Imaging, and Instrumentation, 1993.
- [70] Walnut, D. *Application of Gabor and Wavelet expansions to the Radon Transform*. in Probabilistic and Stochastic methos in Analysis, with applications, J. Byrnes, et al. eds., Kluwer Academic Publishers, Inc.,187-205, 1992.
- [71] Walker, J. *Local inversion of the Radon Transform in the plane using wavelets*. A Primer on wavelets and Their Scientific Applications. Second edition. Chapman & Hall/CRC. Taylor & Francis Group, 2008.
- [72] Walter, G. *Approximation with impulse trains*. Results Math. 34 1998, 185-196.
- [73] Walter, G. Shen, X. *Deconvolution using Meyer wavelets*. J. Integral Equations Appl. 11 1999, 515-534.

-
- [74] Walter, G. Shen, X. *Wavelets and Other Orthogonal Systems*. 2nd edition. Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2001.
 - [75] Wojtaszczyk, P. *A Mathematical Introduction to Wavelets*. Cambridge University Press, 1997.
 - [76] Yamada, K. Ohkitani, K. *Orthonormal wavelet expansion and its application to turbulence*. Progr. Theoret. Phys., vol. 83-5, 1990, 819-823.
 - [77] Yamada, K. Ohkitani, K. *An identification of energy cascade in turbulence by orthonormal wavelet analysis*. Progr. Theoret. Phys., vol. 84-4, 1991, 799-815.
 - [78] Yin, X. Brian W.H. Ferguson, B. Abbott, D. *Wavelet based local tomographic image using terahertz techniques*. Elsevier. Digital Signal Processing, vol. 19, pp.750–763, 2009.
 - [79] Yuan Y. Tang. Victor Wickerhauser. Pong C. Yuen. Chun-hung Li. *Wavelet Analysis and Its Applications*. Springer, 2001.

Índice alfabético

- Algoritmo de reconstrucción, 73
- Análisis del error, 69
- Análisis multiresolución, 34, 37, 42
- Análisis Wavelet , 26

- B-Spline, 42, 44, 46
- B-spline de orden tres, 51
- B-spline discretas, 48
- Base ortonormal, 31, 38, 40

- Caracterización de los espacios W_0 , 41
- Coefficientes
 - B-spline, 48
- Coefficientes spline, 44
- Coefficientes wavelets, 66
- Complemento ortogonal, 38, 41
- Condición de admisibilidad, 27
- condición de admisibilidad, 33
- Convolución, 4

- Delta de Dirac, 10
- Distribución
 - definición de, 10
 - Derivada de, 10
 - propiedades de, 10

- Dual topológico, 11

- Error relativo, 71
- Espacio de Schwartz, 11
- Espacio de Sobolev
 - definición de, 11
 - propiedades de, 12

- Fórmula de retroproyección, 23
- Fórmula de sumación de Poisson, 8
- Filtro binomial, 49
- Filtro identidad, 47
- Filtro rampa, 70
- Fourier
 - coeficientes de, 7
 - fórmula de inversión de, 6
 - propiedades de, 6
 - serie de, 7
 - transformada de, 5
- Función
 - característica, 5
 - decrecimiento rápido, 11
 - dilatada, 27
 - escalada, 47
 - spline, 43
 - trasladada, 27

- Funcional lineal, 11
- Funciones
- cuadrado integrable, 3
 - de prueba, 9
 - ortogonales, 3
- Imágenes digitales, 56
- Momentos de desvanecimiento, 74
- Operado isotrópico, 26
- Operador acotado, 4
- Operador Lambda, 19
- Operador lineal, 4
- Operador retroproyección, 23
- Parseval
- fórmula de, 6
- Plancharel
- fórmula de, 6
- Polinomios spline, 44
- Potencial de Riesz, 73
- Problema inverso, 53
- Propiedades de φ y W_0 , 40
- Proyección ortogonal, 38
- Región de exposición, 70
- Región de interés, 70
- Resultados, 75
- Señal
- descomposición en wavelets, 25
- Sistema ortonormal, 4
- Soporte, 5
- Spline cúbica, 73
- Spline de Schoenberg, 45
- Subespacios cerrados, 38
- Sucesión convergente, 11
- Tomografía computarizada, 53
- Tomografía local, 55
- Transformada Z inversa, 51
- Transformada de Hilbert
- bidimensional, 15
 - definición de, 13
 - ejemplos de, 14
 - inversa de, 14
 - propiedades de, 14
- Transformada de K-plano, 17
- Transformada de Radon
- coordenadas polares en, 16
 - definición de, 15
 - ejemplos de, 21
 - inversión, 61
 - propiedades de, 20
- Transformada de rayos X , 15
- Transformada wavelet
- bidimensional, 33
 - coeficientes, 32
 - continua, 26, 27
 - discreta, 30, 31
 - fórmula de inversión, 28
 - fórmula de Parseval, 29
 - fórmula de Plancherel, 28
 - inversa, 33
 - propiedades, 30
 - rápida, 34
 - semicontinua, 33
- Wavelet y tomografía local, 53
- Wavelets biortogonales, 42
- Wavelets separables biortogonales, 58